

Análisis de Sensibilidad Paramétrica y Evolución de Polos en el Desempeño Dinámico Transitorio de un Sistema de 3-GDL ante Pérdida de Simetría

Parametric Sensitivity Analysis and Pole Evolution in the Transient Dynamic Performance of a 3-DOF System under Loss of Symmetry

Lozano-Cuéllar, L.¹; Sellschopp-Sánchez, F.S.²; Álvarez-Macías, C.³

Datos de Adscripción:

¹ Lozano Cuéllar, Leticia
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna,
Departamento de Ingeniería Eléctrica-Electrónica-Energías Renovables y
Semiconductores, Torreón, Coahuila, México, C.P. 27000.
ROR ID: <https://ror.org/00davy38>
ROR ID: <https://ror.org/00xbw4a70>
llozanoc@correo.itlalaguna.edu.mx
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6471-9655>

² Sellschopp Sánchez, Francisco Sergio
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna, División
de Estudios de Posgrado e Investigación, Posgrado en Ingeniería Eléctrica,
Torreón, Coahuila, México, C.P. 27000.
ROR ID: <https://ror.org/00davy38>
ROR ID: <https://ror.org/00xbw4a70>
fsellschopp@correo.itlalaguna.edu.mx
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3516-3523>

³ Álvarez Macías, Carlos
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna, División
de Estudios de Posgrado e Investigación, Posgrado en Ingeniería Eléctrica,
Torreón, Coahuila, México, C.P. 27000.
ROR ID: <https://ror.org/00davy38>
ROR ID: <https://ror.org/00xbw4a70>
calvarezm@correo.itlalaguna.edu.mx
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2263-0316>

Resumen - Este artículo presenta una evaluación sistemática de la estabilidad relativa y el desempeño dinámico transitorio en un sistema mecánico acoplado de tres grados de libertad. Se analiza cómo la pérdida de simetría física ante la variación controlada de los parámetros afecta las métricas de respuesta en los dominios del tiempo y de la frecuencia. La metodología emplea un enfoque de modelado en espacio de estados para la extracción de valores y vectores propios. Partiendo de una condición nominal unitaria, se ejecuta un protocolo de variación ceteris paribus sobre seis parámetros seleccionados: masas lateral y central, rigidez y amortiguamiento entre el anclaje y la masa lateral, y elementos de acoplamiento interno entre las masas lateral y central. Dichos parámetros se modifican sistemáticamente en un intervalo extendido del 10% al 200% de su valor nominal, con pasos de 0.1. Los resultados se analizan mediante una técnica dual: el lugar de las raíces paramétrico, para visualizar la migración de polos hacia el eje imaginario, y superficies de respuesta tridimensionales que vinculan la interacción de pares paramétricos con el factor de amortiguamiento crítico y el sobreimpulso máximo ante un impulso de fuerza aplicado a la masa central. El estudio demuestra la pertinencia de esta metodología para analizar el comportamiento del sistema e identifica regiones en las que la asimetría compromete la

integridad dinámica. Esto facilita la aplicación de criterios de optimización y de detección de fallas en ingeniería estructural y de control, demostrando que la variación en el acoplamiento externo (anclaje) presenta una sensibilidad superior frente a las variaciones de masa.

Palabras Clave - Amortiguamiento, Desempeño dinámico, Estabilidad relativa, Lugar de las raíces, Sensibilidad paramétrica, Sistemas mecánicos.

Abstract - This paper presents a systematic evaluation of relative stability and transient dynamic performance in a coupled three-degree-of-freedom mechanical system. The research analyzes how the loss of physical symmetry, induced by controlled parametric variation, impacts response metrics in both time and frequency domains. The methodology uses a state-space modeling approach to extract eigenvalues and eigenvectors. Starting from a unit nominal condition, a ceteris paribus variation protocol is executed on six selected parameters: lateral and central masses, stiffness and damping between the anchor and the lateral mass, and internal coupling elements between the lateral and central masses. These parameters are systematically modified over an extended interval from 10% to 200% relative to their nominal value, in increments of 0.1. The results are analyzed using a dual technique: the parametric root locus, to visualize the migration of poles toward the imaginary axis, and three-dimensional response surfaces that link the interaction of parametric pairs with the critical damping factor and maximum overshoot following a force impulse on the central mass. The study demonstrates the relevance of this methodology for analyzing system behavior, identifying regions where asymmetry compromises dynamic integrity. This supports the application of optimization and fault-detection criteria in structural and control engineering, showing that variation in external coupling (anchorage) is more sensitive than mass variation.

Keywords - Damping, Dynamic performance, Mechanical systems, Parametric sensitivity, Relative stability, Root locus.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de sistemas mecánicos multi-masa constituye una herramienta fundamental en el diseño, supervisión y evaluación de estructuras sometidas a perturbaciones transitorias (Chopra, 2012). En el ámbito actual de la ingeniería estructural, aeroespacial, automotriz y de control, las configuraciones de múltiples grados de libertad (GDL) exhiben respuestas oscilatorias complejas; su estabilidad está condicionada directamente por la interacción de parámetros físicos fundamentales, como la masa, la rigidez y el amortiguamiento. En este contexto, pequeñas variaciones paramétricas pueden modificar de manera significativa las características dinámicas globales del sistema, alterando su capacidad de disipación de energía y comprometiendo su estabilidad relativa (Inman, 2022; Chopra, 2012).

Históricamente, la estabilidad dinámica en sistemas vibratorios se ha estudiado mediante formulaciones modales y técnicas basadas en el análisis espectral de matrices dinámicas (Meirovitch, 2010). Específicamente, la implementación de representaciones en el espacio de estados ofrece una descripción compacta de la evolución temporal y simplifica la obtención de los valores propios complejos correspondientes a los modos naturales de oscilación. (Ogata, 2010; Nise, 2015). La ubicación de dichos polos en el plano complejo proporciona información directa sobre el amortiguamiento modal, la frecuencia natural y el grado de estabilidad relativa del sistema. Desde el punto de vista físico, el movimiento de polos hacia el eje imaginario implica una reducción progresiva de la capacidad de disipación y un incremento de la sensibilidad oscilatoria ante perturbaciones externas (Nise, 2015).

Por tanto, el estudio de sensibilidad paramétrica tiene gran relevancia dado que permite identificar aquellos parámetros físicos que tienen mayor influencia en el comportamiento dinámico. Esta información resulta muy importante en aplicaciones donde se tienen procesos con degradación estructural, envejecimiento de materiales, aflojamiento de uniones mecánicas o pérdidas de simetría física ocasionadas por fallas parciales, entre otros (Franklin et al., 2015). En sistemas originalmente simétricos, la modificación diferencial de parámetros puede provocar fenómenos de desacoplamiento modal, concentración energética y amplificación resonante, afectando directamente el desempeño transitorio (Meirovitch, 2010).

Una gran cantidad de trabajos tratan sobre el análisis modal de sistemas mecánicos utilizando técnicas de perturbación, identificación modal y análisis de estabilidad lineal (Chen, 2012; Meirovitch, 2010;). Sin embargo, en general estos estudios se enfocan en configuraciones nominales o consideran variaciones paramétricas limitadas alrededor del punto de operación (Franklin et al., 2015; Nise, 2015). En contraste, el estudio sistemático de amplios rangos de variación paramétrica y su efecto simultáneo sobre métricas temporales y frecuenciales parece ser un tema poco abordado por las implicaciones que pueden tener las grandes variaciones. Particularmente, la interacción entre pérdida de simetría física y evolución modal

continúa siendo un área de interés debido a sus implicaciones en diagnóstico estructural y diseño robusto (Den Hartog, 1985; Rao, 2017).

Por otra parte, el lugar geométrico de las raíces se ha utilizado ampliamente en ingeniería de control para estudiar la evolución de los polos ante cambios paramétricos. Aunque esta técnica se emplea con frecuencia en sistemas eléctricos y de control automático, su aplicación en sistemas mecánicos acoplados ofrece una alternativa visual y analítica de alto valor para comprender fenómenos de estabilidad relativa (Ogata, 2010; Nise, 2015). La trayectoria de los polos complejos permite identificar regiones críticas de operación, modos dominantes y tendencias de amortiguamiento que no siempre son evidentes únicamente mediante respuestas temporales, (Nise, 2015; Franklin et al., 2015).

Adicionalmente, los índices clásicos de desempeño transitorio, tales como el máximo sobreimpulso, el tiempo de establecimiento y el factor de amortiguamiento, proporcionan indicadores cuantitativos del comportamiento dinámico ante perturbaciones impulsivas (Franklin et al., 2015). La integración de estos índices con técnicas de análisis modal y superficies de sensibilidad paramétrica permite construir un marco metodológico robusto para evaluar la integridad dinámica del sistema ante escenarios de asimetría física (Chen, 2024).

En este trabajo se presenta una evaluación sistemática de la estabilidad relativa y del desempeño dinámico transitorio de un sistema mecánico acoplado de tres grados de libertad. La metodología propuesta emplea un modelo lineal en espacio de estados para extraer los valores propios asociados a diferentes configuraciones paramétricas. A partir de una condición nominal simétrica, se desarrolla un protocolo de variación *ceteris paribus* sobre seis parámetros físicos representativos, incluyendo masas, rigideces y amortiguamientos internos y externos. Cada parámetro se modifica dentro de un rango extendido del 10% al 200% de su valor nominal, lo que permite evaluar escenarios de pérdida progresiva de la simetría. El análisis se complementa con dos herramientas principales. La primera corresponde al lugar de las raíces paramétrico, utilizado únicamente para visualizar la migración modal y la proximidad de los polos al eje imaginario. La segunda consiste en la visualización de superficies tridimensionales de respuesta que relacionan pares paramétricos con indicadores dinámicos críticos como el factor de amortiguamiento y el sobreimpulso máximo. De esta forma, se logra identificar qué combinaciones físicas generan deterioro dinámico significativo y cuáles parámetros poseen mayor sensibilidad estructural.

Los resultados obtenidos demuestran que las variaciones en los elementos de acoplamiento externo (anclaje) producen alteraciones más severas en la estabilidad relativa que las asociadas únicamente a cambios de masa. Asimismo, se evidencia que la pérdida de simetría modifica sustancialmente la distribución modal del sistema y puede conducir a regiones de comportamiento altamente oscilatorio. Finalmente, el trabajo aporta una metodología aplicable al análisis de sensibilidad, diagnóstico estructural y optimización dinámica de sistemas mecánicos multi-masa.

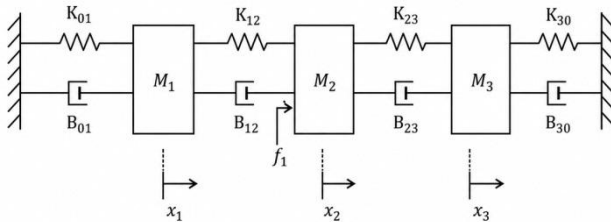
II. PARTE TÉCNICA DEL ARTÍCULO

2.1 Modelación del sistema multimasa de 3 GDL

Los sistemas mecánicos de múltiples grados de libertad representan estructuras dinámicas compuestas por varios elementos interconectados capaces de oscilar independientemente. El comportamiento dinámico de estos sistemas depende de la interacción simultánea entre fuerzas inerciales, disipativas y restauradoras, así como de la fuerza perturbadora f impuesta al sistema. Se considera un sistema mecánico traslacional lineal de 3 grados de libertad, compuesta por tres masas M acopladas mediante elementos elásticos K y disipativos B , tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Sistema mecánico traslacional de 3 GDL



Cada masa en el sistema posee un desplazamiento horizontal x independiente respecto a su posición de equilibrio, definidos como:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Desde el punto de vista físico, el sistema constituye un modelo vibratorio multi-masa con interacción distribuida de energía cinética, potencial y disipativa. La dinámica global depende directamente de la transferencia de energía entre masas a través de los elementos de acoplamiento internos, donde la estabilidad relativa puede modificarse significativamente ante modificaciones paramétricas del sistema.

La formulación dinámica se desarrolla aplicando la 2da Ley de Newton a cada masa del sistema, que en términos matriciales generales es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masas, $\mathbf{B}$ es la matriz de elementos disipativos, $\mathbf{K}$ es la matriz de elementos elásticos, $\mathbf{F}$ es el vector de las fuerzas externas aplicadas al sistema y los términos $\dot{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\mathbf{x}}$ representan la derivada y doble derivada del vector de estados de desplazamientos.

La matriz de masas $\mathbf{M}$ es diagonal debido a que cada masa posee únicamente inercia traslacional independiente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

En cambio, los elementos de amortiguamiento y de rigidez elástica presentan interacciones entre masas, por lo que las matrices quedan de la siguiente forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{01} + B_{12} & -B_{12} & 0 \\ -B_{12} & B_{12} + B_{23} & -B_{23} \\ 0 & -B_{23} & B_{23} + B_{30} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{01} + K_{12} & -K_{12} & 0 \\ -K_{12} & K_{12} + K_{23} & -K_{23} \\ 0 & -K_{23} & K_{23} + K_{30} \end{bmatrix} \quad (5)$$

En sistemas simétricos, las matrices dinámicas presentan propiedades estructurales que facilitan el desacoplamiento modal y permiten una distribución equilibrada de la energía vibratoria (CHEN et al., 2024). Sin embargo, cuando se produce una pérdida de simetría por modificaciones paramétricas, los modos de vibración pueden alterarse, lo que provoca cambios en las frecuencias naturales y en las razones de amortiguamiento. Este fenómeno adquiere especial importancia en aplicaciones donde existen degradaciones mecánicas o cambios físicos asociados al envejecimiento estructural (Zhang et al., 2024; Han&Li, 2006).

La modelación del sistema de segundo orden se puede transformar a espacio de estados lineal de primer orden, definiendo un vector de estados $\mathbf{z}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Por lo que la ecuación de estados del sistema queda de orden 6, teniendo los 3 desplazamientos y las 3 velocidades como variables de estado.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (7)$$

Donde la matriz de estado $\mathbf{A}$ contiene toda la información dinámica del sistema, la matriz $\mathbf{B}$ contiene la información relacionada con la entrada al sistema y el vector $\mathbf{u}$ contiene las entradas al sistema.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ determinan la estabilidad dinámica del sistema. Si todos los polos tienen parte real negativa, el sistema es asintóticamente estable. En cambio, polos cercanos al eje imaginario indican baja disipación energética y alta sensibilidad oscilatoria, (Nise 2015; Ogata 2010).

2.2 Estabilidad relativa y análisis de los modos de oscilación

La estabilidad relativa describe el grado de amortiguamiento presente en un sistema dinámico estable. A diferencia de la estabilidad absoluta, que únicamente establece si las oscilaciones divergen o convergen, la estabilidad relativa cuantifica qué tan rápido desaparecen las perturbaciones.

Por tanto, la estabilidad relativa depende directamente de los valores propios o eigenvalores de la matriz **A**:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (11)$$

Los valores propios complejos asociados al sistema poseen la forma:

$$\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_{d,i} \quad (12)$$

donde σ_i representa el factor de amortiguamiento y $\omega_{d,i}$ la frecuencia oscilatoria amortiguada.

La frecuencia natural no amortiguada se calcula de la siguiente manera:

$$\omega_{n,i} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_{d,i}^2} \quad (13)$$

El factor de amortiguamiento relativo puede expresarse como:

$$\zeta_i = \frac{-\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_{d,i}^2}} \quad (14)$$

Valores pequeños de ζ indican comportamiento oscilatorio con duración extendida y respuestas transitorias altamente oscilatorias.

Visto de otra manera, la frecuencia amortiguada se puede expresar en función del amortiguamiento:

$$\omega_{d,i} = \omega_{n,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (15)$$

En términos físicos, una reducción del amortiguamiento provoca la migración de polos hacia el eje imaginario, aumentando la persistencia vibratoria y el riesgo de resonancia, haciendo que el sistema incremente su sensibilidad frente a perturbaciones externas.

Por tanto, el comportamiento dinámico de un sistema puede caracterizarse mediante el coeficiente de amortiguamiento ζ . Cuando $0 < \zeta < 1$, el sistema es subamortiguado y presenta oscilaciones con sobreimpulso. Para $\zeta = 1$, el sistema es críticamente amortiguado, alcanzando el equilibrio en el menor tiempo posible sin oscilaciones. Si $\zeta > 1$, el sistema es sobreamortiguado, y exhibe una respuesta lenta y sin sobrepaso debido al exceso de disipación. Finalmente, cuando $\zeta = 0$, el sistema es no amortiguado y mantiene oscilaciones sostenidas al no existir disipación de energía.

2.3 Lugar de las raíces paramétrico aplicado al análisis oscilatorio

El lugar de las raíces paramétrico se emplea en esta investigación como herramienta de interpretación dinámica para analizar la evolución modal del sistema multimasa ante variaciones físicas y su efecto sobre el comportamiento oscilatorio inducido por una perturbación de tipo impulso aplicada a la masa central. A diferencia del lugar de las raíces clásico utilizado en teoría de control para modificar las ganancias de realimentación, en este trabajo la trayectoria de

los polos se obtiene a partir de la variación sistemática de los parámetros físicos p del modelo, tales como masas, rigideces y amortiguamientos.

La dinámica del sistema en espacio de estados se encuentra gobernada por:

$$\dot{\mathbf{z}}(t, p) = \mathbf{A}(p)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(p)\mathbf{u}(t) \quad (16)$$

donde la matriz dinámica $\mathbf{A}(p)$ depende explícitamente del parámetro físico p sometido a análisis. Los polos del sistema se obtienen resolviendo:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(p)) = 0 \quad (17)$$

La obtención de los eigenvalores y demás métricas se calcula de la misma manera que (12)-(15).

Cada eigenvalor complejo es dependiente del parámetro p y describe un modo oscilatorio amortiguado cuya posición en el plano complejo permite interpretar directamente el desempeño dinámico del sistema. En consecuencia, la migración de polos hacia el eje imaginario indica una reducción del amortiguamiento relativo y una mayor persistencia de las oscilaciones inducidas por el impulso externo.

Desde el punto de vista físico, el lugar de las raíces paramétrico permite visualizar cómo la energía introducida por la perturbación se redistribuye dinámicamente entre las masas del sistema conforme se alteran las propiedades de acoplamiento interno y externo. Por tanto, esta herramienta facilita la identificación de configuraciones críticas asociadas con: incremento del sobreimpulso, oscilaciones persistentes, reducción del amortiguamiento del modo de oscilación, aumento del tiempo de establecimiento, proximidad a condiciones resonantes.

De esta manera, el lugar de las raíces paramétrico no se utiliza como criterio absoluto de estabilidad, sino como una herramienta de interpretación física orientada al análisis del comportamiento oscilatorio y la estabilidad relativa del sistema multimasa.

2.4 Sensibilidad paramétrica

La sensibilidad paramétrica permite cuantificar la influencia de las variaciones físicas del sistema en sus propiedades dinámicas y en sus métricas de desempeño transitorio. En sistemas multimasa acoplados, pequeñas modificaciones en parámetros de masa, rigidez o amortiguamiento pueden alterar significativamente la distribución de los polos del sistema y la capacidad disipativa global.

La sensibilidad de un valor propio respecto a un parámetro físico p puede definirse mediante:

$$S_{\lambda,p} = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \quad (18)$$

donde $S_{\lambda,p}$ mide la variación del polo inducida por cambios paramétricos. Valores elevados de sensibilidad indican parámetros con un fuerte impacto en el comportamiento dinámico del sistema.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Consideraciones del caso de estudio

El caso de estudio se centra en un sistema mecánico traslacional de 3 grados de libertad, compuesto por tres masas acopladas entre sí mediante cuatro resortes y cuatro amortiguadores. El sistema cuenta con dos anclajes rígidos y una entrada para aplicar un impulso de fuerza a la masa central (masa 2), tal como se mostró en la Figura 1.

Se trata de un sistema vibratorio traslacional en el que cada una de las tres masas se desplaza horizontalmente respecto a su posición de equilibrio, y está sujeta a anclajes fijos y entre sí mediante resortes y amortiguadores lineales. La configuración del sistema es completamente simétrica en su estado nominal: todas las masas, elementos elásticos y coeficientes de amortiguamiento se fijaron con un valor unitario (1 kg, 1 N/m, 1 N·s/m). Con esta elección de valores, se busca comparar la sensibilidad relativa de cada parámetro sin lidiar con escalas dominantes.

Uno de los objetivos de estudio es evaluar cómo la pérdida de simetría física, inducida por variaciones controladas de los parámetros, afecta la estabilidad relativa y el desempeño transitorio ante una perturbación de tipo impulso aplicada a la masa central (M_2). Todo esto parte del análisis del desplazamiento de los polos dominantes del sistema, y calculando factores como frecuencia natural no amortiguada ω_n , frecuencia amortiguada dominante ω_d , factor de amortiguamiento ζ y sobreimpulso máximo M_p .

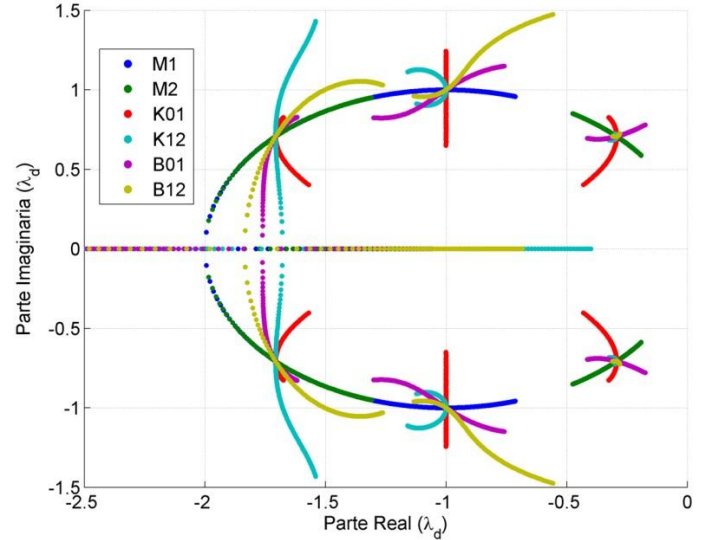
3.2 Evaluación del desplazamiento de polos del sistema

En una primera etapa, se realizó un barrido paramétrico variando cada uno de los seis parámetros de manera independiente, manteniendo los demás en su valor nominal (protocolo *ceteris paribus*). El rango de variación se extendió del 10% al 200% del valor nominal (es decir, de 0.1 a 2.0), con incrementos de 0.1. Los parámetros seleccionados corresponden a los elementos cargados a la izquierda del sistema con la finalidad de provocar la pérdida de simetría visto desde la masa central M_2 ; los elementos que serán modificados son: M_1 , M_2 , K_{01} , K_{12} , B_{01} y B_{12} . Los parámetros restantes (lado derecho del sistema) (M_3 , K_{23} , K_{30} , B_{23} , B_{30}) se mantuvieron constantes e iguales a 1.

A partir de la aplicación de las ecs. (16) y (17) sobre la variación de todos los parámetros, se extrae la información de los valores propios, resultando en la imagen del desplazamiento de polos del sistema, mostrada en la Figura 2.

Figura 2

Trayectoria de los 6 polos del sistema (intersecciones visibles) en el plano s por variación de parámetros



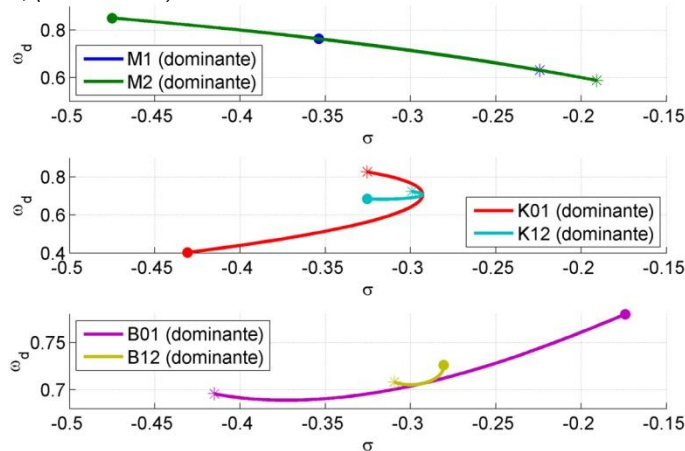
A partir de los resultados mostrados en la figura 2, los polos dominantes son aquellos con parte real más cercana al eje imaginario y determinan la velocidad de decaimiento o amortiguación de la respuesta transitoria; estos polos son complejos conjugados. En dicha figura se observa que los parámetros de masa (M_1 y M_2) modifican un poco la parte real cuando se desvían de la unidad, tendiendo en un caso (línea verde) a aproximarla hacia el eje imaginario, indicando que si tiene influencia en aspectos de amortiguamiento y frecuencia. Por el contrario, la rigidez K_{01} y K_{12} generan desplazamientos más notables en el eje imaginario, mostrando su mayor influencia sobre la frecuencia.

Finalmente, la amortiguación B_{01} y B_{12} presenta un movimiento de polos tanto en frecuencia como en el aspecto disipativo, lo que marca la congruencia con el funcionamiento típico de un amortiguador: su parte real se vuelve más negativa a medida que el parámetro aumenta, lo que indica un incremento de la disipación energética. Sin embargo, lo más relevante es que ningún polo cruza el semiplano derecho, por lo que el sistema se mantiene asintóticamente estable en todo el intervalo explorado. La figura 2 muestra que no todos los parámetros tienen la misma capacidad para modificar la dinámica.

Para una mejor visualización de los resultados, se toma uno de los polos dominantes para graficar por separado los conjuntos de parámetros del mismo tipo, masa (M_1 y M_2), resorte (K_{01} y K_{12}) y amortiguador (B_{01} y B_{12}), Figura 3. En ella se representa la trayectoria de los polos dominantes superpuestos en un mismo plano complejo.

Figura 3.

Evolución de polos dominantes por variación de parámetros de M , K y B ; (● inicio * final)



Cada evolución paramétrica se identifica con un color de línea distinto, de acuerdo con la Figura 2. Se observa que las variaciones de masa (M_1 y M_2) desplazan los polos siguiendo trayectorias casi idénticas y con una curvatura suave, tendiente a reducir valores de frecuencia y acercándose más hacia el eje imaginario, lo que muestra la influencia del cambio de frecuencia y del amortiguamiento; en el caso de ambas masas, se nota mucho más influyente la masa M_2 . Los resortes (K_{01} y K_{12}) producen trayectorias que se aumentan sobre el eje imaginario, aumentando la frecuencia oscilatoria aunque también impactando marginalmente de forma negativa el amortiguamiento; el resorte K_{01} es el más influyente entre estos dos parámetros. Por último, el comportamiento más llamativo corresponde a los amortiguadores: B_{12} mueve el polo marginalmente, lo que indica una influencia limitada sobre el sistema, mientras que B_{01} provoca un desplazamiento casi ortogonal, incrementando notablemente tanto la parte real negativa como la frecuencia amortiguada, con una reducida influencia sobre el cambio de frecuencia dominante. Esta diferenciación cualitativa justifica la necesidad de estudiar conjuntamente pares de parámetros que pertenezcan a categorías físicas distintas, tal como se aborda más adelante, por lo cual, se toman en consideración aquellos parámetros más influyentes en el sistema.

3.3 Evolución de la frecuencia dominante, amortiguamiento y sobreimpulso

Con la finalidad de establecer la influencia de la variación de cada parámetro en el sistema, se procede a determinar los indicadores de frecuencia dominante, coeficiente de amortiguamiento y máximo sobreimpulso, de tal manera que se demuestre con certeza la adecuada selección de los parámetros más influyentes del sistema. Las Figuras 4, 5 y 6 presentan, respectivamente, la evolución de la frecuencia amortiguada dominante ω_d (Figura 4), factor de amortiguamiento ζ (Figura 5) y sobreimpulso máximo M_p (Figura 6), en función del valor de cada parámetro (0.1 a 2.0).

Figura 4.

Evolución de la frecuencia dominante por variación de parámetros de M , K y B

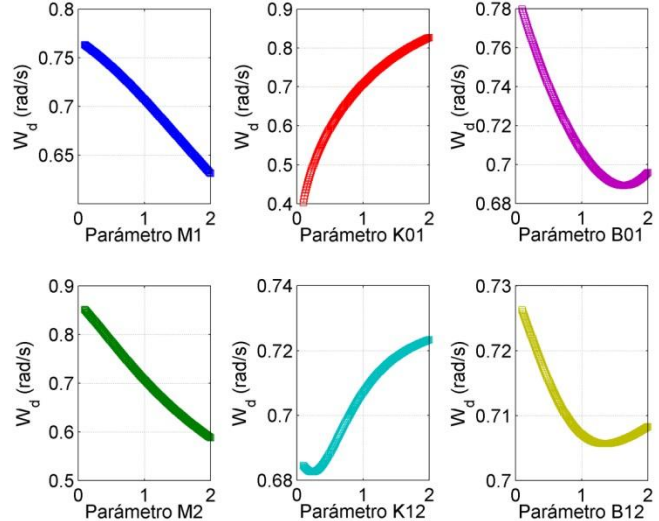
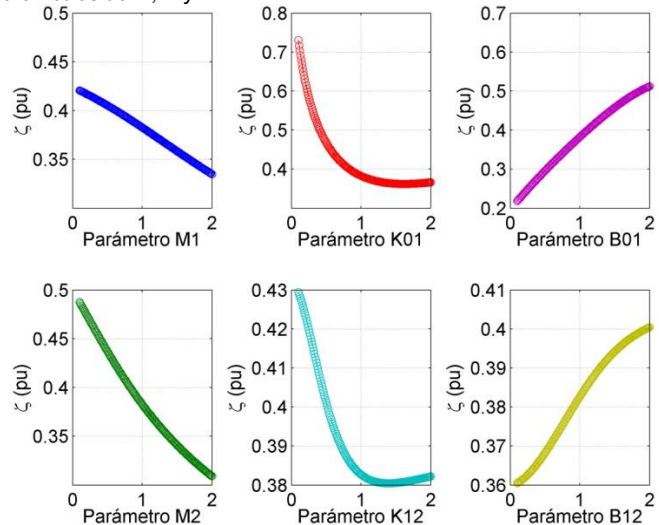


Figura 5.

Evolución del coeficiente de amortiguamiento por variación de parámetros de M , K y B

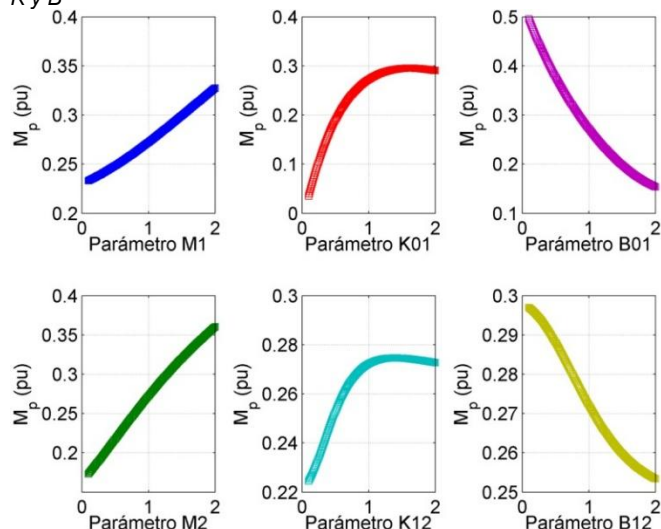


En la Figura 4 se aprecia que la frecuencia disminuye con el aumento de los valores de M_1 y M_2 , y ocurre de manera muy limitada y marginal con los parámetros de amortiguamiento B_{01} y B_{12} . Por el contrario, al aumentar K_{01} y K_{12} , la frecuencia tiende a aumentar. Este comportamiento refleja la relación de compromiso entre rigidez y amortiguamiento: un resorte más rígido eleva la frecuencia natural, pero un amortiguador tiende a reducirla.

La Figura 5 muestra que los parámetros de masa y resorte producen una reducción en el factor de amortiguamiento ζ . En cambio, los amortiguadores elevan ese coeficiente para estabilizar más rápidamente las oscilaciones, demostrando que el amortiguamiento entre el anclaje y la masa lateral es fundamental para disipar energía rápidamente; B_{12} también incrementa ζ pero en menor medida.

Figura 6.

Evolución del máximo sobreimpulso por variación de parámetros de M , K y B



La Figura 6 muestra que también los parámetros de masa y resorte tienden a elevar el máximo sobreimpulso transitorio del sistema a medida que se incrementan sus valores, aunque se observa que el aumento de la rigidez crea un límite físico, que puede deberse a la combinación de las dimensiones de la masa. Por su parte, se confirma la utilidad de los amortiguadores al mitigar o reducir el valor del máximo sobreimpulso a medida que se aumenta la capacidad de los elementos disipativos; se concluye que el elemento disipativo B_{01} presenta una importante influencia sobre el comportamiento oscilatorio del sistema.

3.4 Sensibilidad paramétrica

Para cuantificar el impacto de la variación de los parámetros en el comportamiento del sistema, se realiza un estudio de la sensibilidad del polo dominante respecto a cada parámetro, definido como la variación de la magnitud del polo dominante respecto a la variación del parámetro, ec. (18). La sensibilidad se calculó mediante diferencias finitas centrales a partir de las trayectorias de polos (Tabla 1)

Tabla 1

Datos de sensibilidad paramétrica del sistema

	Min ζ	Max ζ	Min M_p	Max M_p	$S_{\lambda,p}$	valor p
M_1	0.335	0.421	0.233	0.327	0.1051	1.26
M_2	0.309	0.487	0.173	0.360	0.2916	0.12
K_{01}	0.362	0.730	0.035	0.295	1.163	0.10
K_{12}	0.380	0.429	0.224	0.275	0.0677	0.22
B_{01}	0.218	0.512	0.154	0.496	0.1865	0.10
B_{12}	0.360	0.400	0.253	0.297	0.02854	0.24

Se observa que K_{01} presenta la sensibilidad más alta para valores bajos del parámetro (1.163 en $p=0.1$), mientras que M_2 muestra como 2.º lugar en importancia, una sensibilidad mucho más baja (0.2916 en $p=0.12$). En 3.er lugar de relevancia se presenta el amortiguador B_{01} , con una sensibilidad menor (0.1865 en $p=0.1$). En contraste, K_{12} y B_{12} muestran las menores sensibilidades, indicando que su influencia sobre la ubicación del polo dominante es limitada.

Este análisis revela que los parámetros con mayor impacto en la ubicación del polo dominante son, en orden decreciente: K_{01} , M_2 , B_{01} , M_1 , K_{12} y B_{12} . Estos resultados confirman que los parámetros más críticos para la estabilidad relativa y el desempeño transitorio son K_{01} y B_{01} , lo que justifica su inclusión en el análisis posterior de interacción por pares.

3.5 Evaluación de interacción de pares paramétricos

Con base en los resultados de la sensibilidad paramétrica, se seleccionaron tres pares de parámetros para evaluar su efecto combinado sobre la dinámica del sistema: (M_2, K_{01}) , (M_2, B_{01}) y (K_{01}, B_{01}) . La elección obedece a que K_{01} y B_{01} son los parámetros más influyentes, mientras que M_2 es la masa a la que se aplica el impulso y su interacción con los elementos externos puede revelar comportamientos no lineales. Se excluyeron pares con baja sensibilidad (p. ej., K_{12} y B_{12}) por su bajo impacto dentro del sistema.

Para evaluar el impacto de la variación de pares paramétricos, se debe analizar el comportamiento de la frecuencia dominante, del coeficiente de amortiguamiento y del máximo sobreimpulso. Dada la combinación de parámetros y los 3 índices a analizar, se deberían presentar 9 gráficas 3D; sin embargo, debido a limitaciones de espacio, se seleccionan solo 3 que reflejen los impactos más significativos.

Las siguientes Figuras 7, 8 y 9, presentan las superficies tridimensionales de la frecuencia amortiguada dominante ω_d , factor de amortiguamiento ζ y sobreimpulso máximo M_p , respectivamente, en función de los parámetros K_{01} (elasticidad entre anclaje y masa lateral M_1) y B_{01} (amortiguamiento entre anclaje y masa lateral M_1). Ambos parámetros se variaron simultáneamente en el rango [0.1, 2.0] (con pasos de 0.1), manteniendo los demás parámetros en sus valores nominales (1). La elección de este par se debe a su alta sensibilidad individual y a su interacción física directa sobre la misma masa lateral (M_1), lo que permite evaluar escenarios de pérdida de simetría estructural mediante el impacto en la dinámica del sistema.

Figura 7.

Comportamiento de la frecuencia dominante ante variación del par paramétrico K_{01}, B_{01}

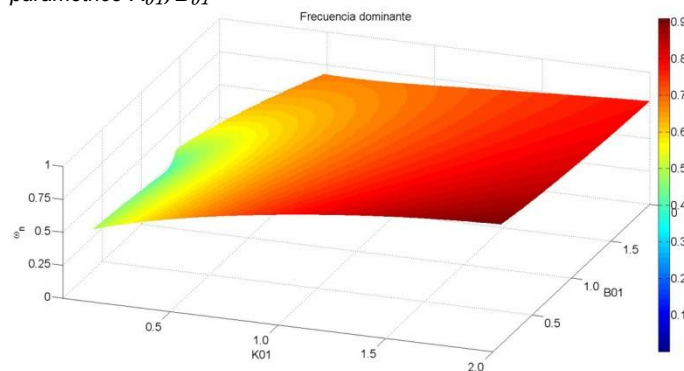


Figura 8.

Comportamiento del coeficiente de amortiguación ante variación del par paramétrico K_{01} , B_{01}

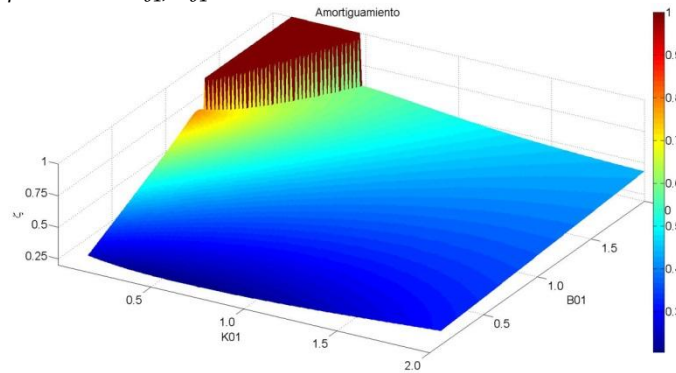
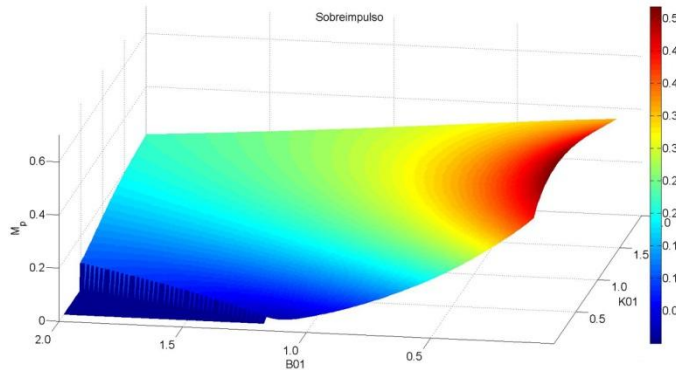


Figura 9.

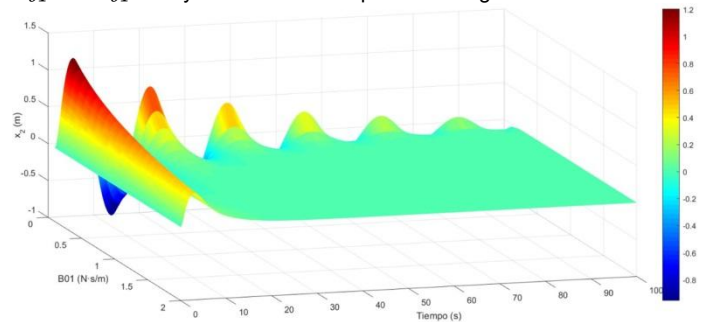
Comportamiento del máximo sobreimpulso ante variación del par paramétrico K_{01} , B_{01}



El análisis de estas superficies muestra una dependencia importante de la dinámica transitoria respecto a las variaciones simultáneas de K_{01} y B_{01} . Se observa un fenómeno de transición abrupta en regiones límite de la región de variación paramétrica: tanto el coeficiente de amortiguamiento alcanza el estado crítico $\zeta = 1$, eliminando la frecuencia dominante amortiguada, $\omega_d = 0$ y llevando el máximo sobreimpulso a cero $M_p = 0$. Físicamente, esto corresponde a una fuerte evolución modal en la que los polos dominantes del sistema migran hacia el eje real, transformando la respuesta oscilatoria en una puramente exponencial. Esta transición evidencia cómo los cambios bruscos en la rigidez y el amortiguamiento alteran radicalmente la dinámica del sistema de 3-GDL. Este resultado se contrasta contra una simulación en el tiempo, aplicando una perturbación tipo impulso a la masa 2, estableciendo el parámetro $K_{01}=0.3$ y variando B_{01} en el rango de estudio; el resultado se muestra en la figura 10:

Figura 10

Respuesta transitoria de la posición de masa 2, x_2 , ante la variación de B_{01} con $K_{01}=0.3$ y todos los demás parámetros igual a 1.



La Figura 10 muestra las respuestas de simulación en el tiempo del desplazamiento de la masa central ante un impulso de fuerza, con las consideraciones antes mencionadas. Se puede notar que cuando B_{01} aumenta de valor, las oscilaciones se amortiguan rápidamente hasta desaparecer por completo $B_{01} > 1.5$, validando así la transición hacia el régimen críticamente amortiguado predicho por las superficies mostradas en las Figuras 7–9. Esta correspondencia directa entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo valida la metodología empleada y demuestra que el par paramétrico modifica de manera significativa el comportamiento dinámico del sistema.

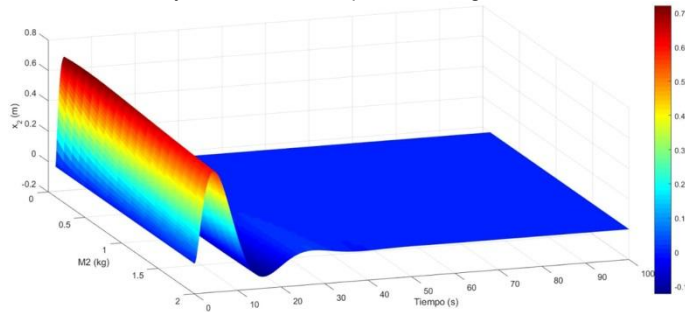
Por tanto, el análisis paramétrico propuesto no solo identifica los parámetros que más impactan al sistema, sino que también permite anticipar con precisión la respuesta transitoria ante perturbaciones, constituyendo una herramienta útil para el diseño y diagnóstico de sistemas estructurales acoplados.

Adicionalmente, se realiza la simulación temporal considerando $K_{01}=0.3$, $B_{01}=1.5$ y variando M_2 en el rango de estudio. El objetivo fue evaluar cómo el amortiguamiento disponible afecta la respuesta ante cambios en la masa central. Al aumentar M_2 se observa que la frecuencia de oscilación disminuye, pero el sobreimpulso no se reduce de manera proporcional; de hecho, para la masa más grande, el sistema tarda más en disipar la energía. Esto indica que el amortiguamiento efectivo depende no solo de B_{01} , sino también de la relación de la inercia de la masa vs disipación. En contraste, cuando M_2 es pequeña, la misma B_{01} produce un amortiguamiento relativo mayor, acercándose al régimen crítico.

Estos resultados complementan el análisis anterior y confirman que no es posible desacoplar el efecto de la masa del comportamiento del amortiguador externo.

Figura 11

Respuesta transitoria de la posición de masa 2, x_2 , ante la variación de M_2 con $K_{01}=0.3$ y todos los demás parámetros igual a 1.



IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método sistemático orientado a evaluar la estabilidad relativa y el desempeño dinámico transitorio de un sistema mecánico acoplado de tres grados de libertad sometido a pérdida progresiva de simetría física. A través de una formulación lineal estructurada en variables de estado y mediante la ejecución del protocolo de variación paramétrica *ceteris paribus*, se obtuvo la evolución de los modos de oscilación a través de los polos del sistema y la sensibilidad dinámica asociada a modificaciones en las matrices de masa, elasticidad y disipación.

Los resultados demostraron que el mapeo espectral y el desplazamiento de polos constituyen una herramienta efectiva para interpretar cambios en el comportamiento oscilatorio del sistema mecánico, lo que permite identificar regiones de operación con menor capacidad disipativa y mayor persistencia vibratoria. Se observó que las variaciones en rigidez y amortiguamiento situadas hacia la parte del anclaje del sistema, en específico los parámetros K_{01} y B_{01} , ejercen la mayor influencia sobre la ubicación del polo dominante y sobre los indicadores dinámicos analizados.

El estudio mostró, además, que la pérdida de simetría modifica de manera importante la distribución modal y puede inducir transiciones hacia condiciones críticamente amortiguadas o altamente oscilatorias, dependiendo de la interacción paramétrica considerada. La concordancia entre las superficies de respuesta modal y las simulaciones transitorias en el tiempo validó la consistencia física de la metodología propuesta.

En conjunto, se considera que la investigación aporta un marco de análisis útil para identificar parámetros críticos, anticipar el deterioro dinámico y apoyar estrategias de diseño robusto, optimización y diagnóstico estructural en sistemas mecánicos multimasa.

V. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de la Laguna por las facilidades brindadas para la realización de la investigación y al Tecnológico Nacional de México por los recursos otorgados a través del proyecto TNM-24138.26-P.

VI. REFERENCIAS

- Chen, C. T. (2012). *Linear system theory and design* (4th ed.). Oxford University Press.
- Chen, H., Zeng, Y., Ding, H., Lai, S., & Chen, L. (2024). Dynamics and vibration reduction performance of asymmetric tristable nonlinear energy sink. *Applied Mathematics and Mechanics*, 45(3), 389–406. <https://doi.org/10.1007/s10483-024-3095-9>
- Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of structures* (4th ed) Pearson Education
- Den Hartog, J. P. (1985). *Mechanical vibrations* (4th ed.). Dover Publications.
- Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback control of dynamic systems* (7th ed.). Pearson.
- Han, B. K., & Li, C. X. (2006). Evaluation of multiple dual tuned mass dampers for structures under harmonic ground acceleration. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6(1), 59–75. <https://doi.org/10.1142/S0219455406001824>
- Inman, D. J. (2022). *Engineering vibration* (5th ed.). Pearson
- Meirovitch, L. (2010). *Fundamentals of vibrations*. Waveland Press.
- Nise, N. S. (2015). *Control systems engineering* (7th ed.). Wiley.
- Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
- Rao, S. S. (2017). *Mechanical vibrations* (6th ed.). Pearson.
- Thomson, W. T., & Dahleh, M. D. (1998). *Theory of vibration with applications* (5th ed.). Prentice Hall.
- Zhang, X., Hu, S., Zhang, S., Zhu, H., Cao, M., Wang, Q., & Sumarac, D. (2024). Modal analysis and vibration control of a vertical cable with dual tuned mass dampers. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 43(1), 455–475. <https://doi.org/10.1177/14613484231182487>

No.	Rol	Descripción
1	Conceptualización [Conceptualization]	Leticia Lozano Cuéllar
2	Curación de datos [Data curation]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez
3	Análisis formal [Formal analysis]	Leticia Lozano Cuéllar
4	Obtención de fondos [Funding acquisition]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez
5	Investigación [Investigation]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez
6	Metodología [Methodology]	Leticia Lozano Cuéllar
7	Administración del proyecto [Project administration]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez
8	Recursos [Resources]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez Carlos Álvarez Macías
9	Software [Software]	Leticia Lozano Cuéllar Carlos Álvarez Macías
10	Supervisión [Supervision]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez Carlos Álvarez Macías
11	Validación [Validation]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez
12	Visualización [Visualization]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez Carlos Álvarez Macías
13	Redacción - borrador original [Writing – original draft]	Leticia Lozano Cuéllar
14	Redacción - revisión y edición [Writing – review & editing]	Leticia Lozano Cuéllar Francisco Sergio Sellschopp Sánchez Carlos Álvarez Macías