Control de Posición, Velocidad y Momentum para seguimiento de trayectorias en un Robot Manipulador Hamiltoniano

Nava-Bustamante, M.I.[1] , Meza-Medina, J.L. [2]; Loera-Palomo, R.[3]; Hernández-Jacobo, C. [4]

Datos de Adscripción:

[1]✉ Mario Iván Nava Bustamante. Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico Superior de Lerdo. mario.nb@itslerdo.edu.mx
https://orcid.org/0009-0000-4989-1551

[2] José Luis Meza Medina. Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna. jlmeza2000@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5542-5549

[3] Rodrigo Loera Palomo. SECIHTI – Universidad Autónoma de San Luis Potosí / Facultad de Ingeniería. rloerapa@secihti.mx
https://orcid.org/0000-0003-4586-3523

[4] Cesar Alberto Hernández Jacobo. Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna. cesar_ahj@ieee.org
https://orcid.org/0000-0001-5491-0366

Resumen **- El control de seguimiento de trayectorias en manipuladores robóticos constituye un desafío clave dentro del área del control no lineal, debido a la naturaleza fuertemente acoplada y no lineal de su dinámica. Ante la creciente demanda de precisión y estabilidad en tareas de seguimiento en entornos variables, se requieren estrategias de control que respeten la estructura física del sistema y permitan una regulación eficiente de sus variables fundamentales. Este trabajo propone una estrategia de control basada directamente en las ecuaciones de Hamilton, aprovechando su capacidad para describir la evolución temporal del sistema en términos de coordenadas generalizadas y momentos conjugados. A diferencia de los enfoques clásicos que dependen de modelos Lagrangianos o simplificaciones lineales, la formulación Hamiltoniana permite abordar de manera explícita la interacción entre energía cinética, energía potencial y momentum, proporcionando un marco más estructurado para el diseño del controlador. Se diseña una ley de control multivariable que actúa simultáneamente sobre la posición, la velocidad y el momento del manipulador, con el objetivo de lograr seguimiento preciso de trayectorias deseadas. La estabilidad se garantiza mediante el uso de funciones tipo Lyapunov construidas a partir de la energía total del sistema, y se valida el desempeño a través de simulaciones numéricas en un manipulador de dos grados de libertad.**

Palabras Clave: Control Hamiltoniano, Control no lineal, Ecuaciones de Hamilton, Momentum generalizado.

Abstract **- Trajectory tracking control in robotic manipulators is a key challenge in the field of nonlinear control, due to the highly coupled and nonlinear nature of their dynamics. As the demand for precision and stability in tracking tasks under variable environments increases, it becomes essential to develop control strategies that respect the physical structure of the system and enable efficient regulation of its fundamental variables. This work proposes a control strategy directly based on Hamilton's equations, taking advantage of their ability to describe the temporal evolution of the system in terms of generalized coordinates and conjugate momenta. Unlike classical approaches that rely on Lagrangian models or linear simplifications, the Hamiltonian formulation allows for an explicit representation of the interaction between kinetic energy, potential energy, and momentum, providing a more structured framework for controller design. A multivariable control law is designed to act simultaneously on the manipulator's position, velocity, and momentum, with the goal of achieving accurate tracking of desired trajectories. Stability is ensured through the use of Lyapunov-like functions derived from the total system energy, and the performance is validated through numerical simulations on a two-degree-of-freedom manipulator.**

Keywords: Hamiltonian Control, Nonlinear Control, Hamilton's Equations, Generalized Momentum.

I. INTRODUCCIÓN

El control de seguimiento de trayectorias en manipuladores robóticos continúa siendo una línea activa de investigación dentro del control no lineal, principalmente debido a la complejidad inherente de la dinámica de estos sistemas. Su comportamiento multivariable, altamente acoplado y no lineal, complica la aplicación efectiva de técnicas clásicas de control como PID o LQR, especialmente en contextos que requieren alta precisión, eficiencia energética y robustez ante perturbaciones (Tinoco et al., 2025; Liu et al., 2023).

Una alternativa estructuralmente sólida para modelar y controlar este tipo de sistemas la ofrece la formulación Hamiltoniana, la cual permite representar la dinámica del manipulador en términos de coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados (van der Schaft, 2017; Ortega et al., 2001). A diferencia de la formulación Lagrangiana, el enfoque Hamiltoniano facilita la separación explícita entre energía cinética, energía potencial y entradas externas, lo que permite diseñar leyes de control con significado físico claro y propiedades deseables de estabilidad (Altawaitan et al., 2024).

Este trabajo propone una estrategia de control multivariable basada directamente en las ecuaciones de Hamilton, sin recurrir a la extensión Hamiltoniana por puert. La ley de control diseñada actúa simultáneamente sobre la posición q, la velocidad $\dot{q}$ (obtenida indirectamente a través del momentum conjugado), y el propio momentum$p$, lo cual permite regular la dinámica del sistema desde una perspectiva energética completa. Esta triple regulación ha sido escasamente explorada, pero ha demostrado ventajas teóricas y prácticas en trabajos recientes aplicados a sistemas dinámicos complejos (Zhang et al., 2024; Chang et al., 2023).

Diversas líneas de investigación contemporáneas han retomado el principio de estructuración energética como una vía para mejorar la estabilidad, el rendimiento y la interpretabilidad de los

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101

This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

sistemas de control. Por ejemplo, Gong et al. (2023) diseñan un controlador pasivo para excavadoras autónomas, mientras que Beckers y Colombo (2023) integran aprendizaje físico-informado en controladores energéticos. Khader et al. (2021) introducen políticas de modelado energético profundo, y Hu et al. (2024) exploran control por aprendizaje imitativo generativo aplicado a manipuladores en tareas dinámicas.

En manipuladores con articulaciones flexibles, Chang et al. (2023) emplean control por modelado energético en brazos inspirados en pulpos, validando el potencial de estos enfoques en estructuras altamente flexibles. Otros estudios han propuesto marcos híbridos que integran modelado físico con aprendizaje automático profundo, especialmente para entornos inciertos o tareas adaptativas (Rudin et al., 2022; Schulman et al., 2017; Mao et al., 2023).

Desde la perspectiva teórica, el marco de pasividad propuesto por Ortega et al. (2001) y extendido por van der Schaft (2017) continúa siendo un referente fundamental para el diseño de controladores energéticos con garantías de estabilidad. Nuestra propuesta retoma estos principios, pero evitando el uso de la formulación port-Hamiltoniana, con el objetivo de mantener la claridad matemática y facilitar la aplicación práctica en sistemas robóticos reales. La validez del enfoque fue demostrada mediante simulaciones numéricas en MATLAB/Simulink sobre un manipulador planar de dos grados de libertad. Se utilizaron trayectorias diferenciables como referencia, y se evaluaron cuatro variables clave: posición, velocidad, momentum conjugado y torque aplicado. Los resultados obtenidos muestran un seguimiento preciso, control energético estructurado y una significativa reducción en el esfuerzo de control en comparación con controladores convencionales (Heydari Shahna et al., 2023).

II. PARTE TÉCNICA DEL ARTÍCULO

Esta sección presenta el desarrollo técnico del artículo, donde se expone de manera estructurada el modelo dinámico Hamiltoniano del robot manipulador, la estrategia de control propuesta, la ley de control implementada mediante simulaciones y el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. La formulación empleada parte directamente de las ecuaciones de Hamilton, lo cual permite capturar de forma precisa las relaciones entre energía cinética, energía potencial y variables de control.

2.1 Modelo Hamiltoniano de un Robot Manipulador de dos grados de libertad

El modelado preciso de un sistema robótico constituye un paso fundamental para el diseño y análisis de estrategias de control avanzadas. En este trabajo, se emplea la formulación Hamiltoniana clásica para describir la dinámica de un robot manipulador planar de dos grados de libertad, considerando sus coordenadas generalizadas y los momentos conjugados asociados. Este enfoque permite representar la evolución temporal del sistema mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, estructuradas sobre el espacio de estados, lo cual es particularmente útil para el diseño de leyes de control energéticamente coherentes. En este apartado se deriva explícitamente el modelo Hamiltoniano del robot manipulador de dos grados de libertad utilizado en la simulación, partiendo de sus parámetros físicos (masas, longitudes, centros de masa e inercias) y considerando la energía cinética y potencial en coordenadas articulares. Las ecuaciones resultantes se expresan en forma matricial, preservando la estructura de las ecuaciones de Hamilton y sentando las bases para el diseño del controlador propuesto.

El modelo dinámico de un manipulador robótico se puede formular de manera estructurada a partir de las ecuaciones de Hamilton, las cuales permiten representar la evolución temporal del sistema mecánico en función de pares canónicos: las coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$ y los momentos conjugados $p \in \mathbb{R}^n$. A diferencia de la formulación de Euler-Lagrange, la formulación Hamiltoniana separa explícitamente la energía cinética, la energía potencial y el torque de entrada. Es posible obtener las ecuaciones de Hamilton partiendo del Lagrangiano $L(q, \dot{q})$, el cual está definido por

$$L(q, \dot{q}) = k(q, \dot{q}) - u(q) \tag{1}$$

donde $k(q, \dot{q})$ y $u(q)$ representan la energía cinética y potencial del sistema, mientras que q y $\dot{q}$ representan a los vectores de posiciones y velocidades articulares, respectivamente. Para el modelo Hamiltoniano, se define un vector de estados $x = [q\ p]^T$, donde p resulta ser un vector de momentos conjugados dado por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \tag{2}$$

El Hamiltoniano del sistema puede obtenerse de

$$H(q, p) = \dot{q}^T p - L(q, \dot{q}). \tag{3}$$

A partir de (3), pueden ser obtenidas las ecuaciones de movimiento de Hamilton:

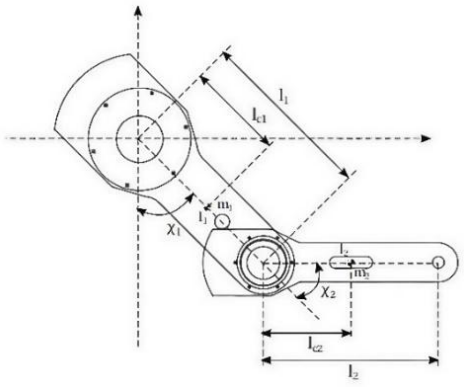
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{4}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p} + \tau. \tag{5}$$

En este trabajo se consideran robots manipuladores conformados por eslabones rígidos (Figura 2) conectados mediante articulaciones libres de fricción y elasticidad. Los parámetros considerados para el robot se incluyen en la Tabla 1.

Figura 1

Diagrama esquemático del robot manipulador de dos grados de libertad



https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101

This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Año: 2025. Volumen: 1. Numero:11 ISSN: 2448-623X

Tabla 1
Parámetros del robot manipulador

Notación	Significado	Valor	Unidades
$\mathbf{x_1}$	Posición angular eslabón 1	-	Rad
$\mathbf{x_2}$	Posición angular eslabón 2	-	Rad
$\mathbf{l_1}$	Longitud del eslabón 1	0.45	Metros
$\mathbf{l_2}$	Longitud del eslabón 2	0.45	Metros
$\mathbf{l_{c1}}$	Centro de masa del eslabón 1	0.091	Metros
$\mathbf{l_{c2}}$	Centro de masa del eslabón 2	0.048	Metros
$\mathbf{m_1}$	Masa del eslabón 1	23.902	Kilogramos
$\mathbf{m_2}$	Masa del eslabón 2	3.88	Kilogramos
$\mathbf{I_2}$	Inercia del eslabón 1	1.266	$\mathrm{kgm^2/rad}$
$\mathbf{I_2}$	Inercia del eslabón 2	0.093	$\mathrm{kgm^2/rad}$

Los parámetros experimentales corresponden al robot manipulador CICESE, que se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de La Laguna, el cual se muestra en la Figura 2.

Figura 2
Robot manipulador CICESE

2.2 Estrategia de control propuesta

El objetivo principal de este trabajo es diseñar una estrategia de control que permita el seguimiento asintótico de una trayectoria deseada en un robot manipulador modelado mediante la formulación Hamiltoniana. En este contexto, se busca regular simultáneamente tres variables clave: la posiciónq, la velocidad $\dot{q}$ y el momentum p, con el fin de lograr un desempeño preciso y energéticamente consistente. Se considera que el sistema debe seguir una trayectoria deseada $q_d(t)$ suave y derivable, definida sobre un intervalo de tiempo $t \in [0, T]$. Para ello, se definen los errores de seguimiento:

$$\tilde{q} = q - q_d, \qquad \tilde{p} = p - p_d, \tag{6}$$

donde $\tilde{q}$ representa el error de posición y $\tilde{p}$ representa el error de momentum. La variable p_d corresponde al momentum deseado, calculado a partir de la relación entre velocidad deseada y la matriz de inercia del sistema:

$$p_d = M(\dot{q_d})\dot{q}_d. \tag{7}$$

El objetivo del controlador es garantizar que $\tilde{q}(t) \to 0$ y $\tilde{p} \to 0$ cuando $t \to \infty$.

2.3 Ley de control propuesta

A partir del modelo Hamiltoniano derivado anteriormente, se diseñó una ley de control multivariable orientada al seguimiento y control simultáneo de la posición, velocidad y momentum a partir de una trayectoria deseada. El objetivo del controlador es garantizar que el sistema converja hacia una referencia deseada definida por las trayectorias de posición $q_d(t)$ y velocidad $\dot{q}_d$ deseadas.

El diseño de la ley de control se fundamenta en dos principios clave: conservar la estructura dinámica del modelo Hamiltoniano y construir una función de energía total que pueda servir como función de Lyapunov, con el fin de garantizar estabilidad en lazo cerrado. Se propone una función de Lyapunov basada en la energía almacenada en los errores

$$V(\tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{1}{2}\,\tilde{p}^T {K_d}^{-1}\,\tilde{p} + \frac{1}{2}\,\tilde{q} K_p\,\tilde{q}, \tag{8}$$

donde

- $K_d \in \mathbb{R}^{\{n\times n\}}$ es una matriz simétrica definida positiva que modela la disipación artificial o amortiguamiento estructurado del sistema.
- $K_p \in \mathbb{R}^{\{n\times n\}}$es una matriz definida positiva que representa la rigidez virtual del lazo proporcional.

El objetivo del controlador será entonces disipar esta energía hasta llevarla a cero. SI deseamos que el sistema siga la trayectoria deseada, una forma efectiva es cancelar el termino conservativo del sistema y reemplazarlo por su evaluación sobre la trayectoria deseada $q_d(t)$, de modo que el control aporte la dinámica restante. Se propone:

$$\tau = -K_d\tilde{p} - K_p\,\tilde{q} + \frac{\partial H(q,p_d)}{\partial q}. \tag{9}$$

Este diseño tiene tres componentes: el primero se encarga de la disipación proporcional al error de Momentum, el segundo actúa referente al error de posición y el tercer término es la compensación dinámica conservativa deseada.
En resumen, la estrategia de control se puede sistematizar en los siguientes pasos: obtención del modelo Hamiltoniano con entrada τ, definición de una trayectoria deseada, construcción de una función energética basada en los errores de posición y Momentum y diseño de una ley de control que actué como disipador y compensador energético.

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101
This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

2.4 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Para analizar la estabilidad del sistema cerrado bajo la ley de control propuesta, se retoma la función candidata de Lyapunov (8) que representa la energía almacenada en los errores generalizados de posición y momentum. Esta función combina un término cinético asociado al error de momentum y un término potencial asociado al error de posición.

Para que una función $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sea válida como función de Lyapunov y permita concluir estabilidad del sistema de control en lazo cerrado en el sentido de Lyapunov, debe satisfacer las siguientes condiciones en un entorno del equilibrio, es decir $(\tilde{q}, \tilde{p}) = (0,0)$:

1. Positivad definida:
   Existe una constante $\alpha_1 > 0$ tal que

$$V(\tilde{q}, \tilde{p}) \geq \alpha_1 \parallel (\tilde{q}, \tilde{p}) \parallel^2, \quad \forall (\tilde{q}, \tilde{p}) \neq 0. \tag{10}$$

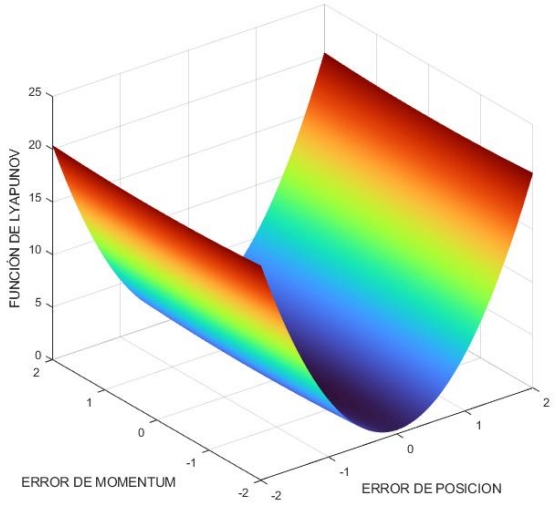
Esto garantiza que V mide la energía del error y solo se anula en el punto de equilibrio.

2. Nulidad en el equilibrio:
   Se cumple:

$$V(0,0) = 0. \tag{11}$$

En la Figura 3, se muestra que la función de Lyapunov $V(\tilde{q}, \tilde{p})$ es estrictamente positiva para todos los valores $(\tilde{q}, \tilde{p}) \neq (0,0)$, y que $V(0,0) = 0$, es decir, es nula en el origen.

Figura 3
Gráfica de la Función de Lyapunov $V(\tilde{q}, \tilde{p})$



3. Cotas superiores:
   Existe una constante $\alpha_2 > 0$ tal que

$$V(\tilde{q}, \tilde{p}) \leq \alpha_2 \parallel (\tilde{q}, \tilde{p}) \parallel^2, \quad \forall (\tilde{q}, \tilde{p}) \neq 0. \tag{12}$$

4. Derivada negativa semidefinida:
   Existe una constante $\alpha_3 > 0$ tal que la derivada de V es:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \tilde{p}) \leq \alpha_3 \parallel \tilde{p} \parallel^2, \tag{13}$$

lo cual garantiza que la energía disminuye con el tiempo, al menos por efecto del error de momentum.

Si se cumplen las condiciones anteriores, entonces según el Teorema de Lyapunov, el sistema dinámico no lineal es estable. En el caso específico de este trabajo, debido a que:

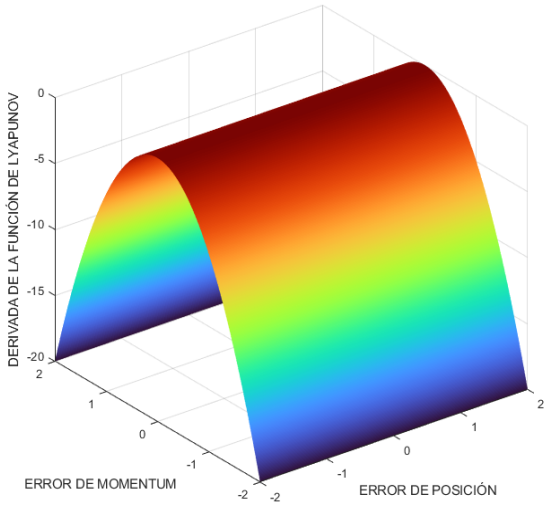
$$\dot{V}(\tilde{q}, \tilde{p}) = -\tilde{p}^T \tilde{p} - \tilde{p}^T K_d^{-1} K_p \tilde{q}, \tag{14}$$

y dado que el primer término es cuadráticamente negativo definido y el segundo es acotado por Cauchy-Schwarz, se puede asegurar que:

- $\dot{V} \leq 0 \to$ estabilidad,
- Bajo condiciones adicionales, se puede demostrar estabilidad asintótica local.

La gráfica mostrada en la Figura 4 confirma que la derivada de la función de Lyapunov $\dot{V}(\tilde{q}, \tilde{p}) \leq 0$ para todos los valores de $(\tilde{q}, \tilde{p})$, y que $\dot{V} = 0$ únicamente cuando $\tilde{p} = 0$. Esta propiedad implica que la energía del sistema decrece con el tiempo, o se mantiene constante en ausencia de error de momentum.

Figura 4
Gráfica de la derivada de la Función de Lyapunov $\dot{V}(\tilde{q}, \tilde{p})$



III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con el objetivo de validar el desempeño del controlador propuesto, se realizaron simulaciones numéricas en MATLAB/Simulink sobre un modelo dinámico de un robot manipulador planar de dos grados de libertad. El modelo fue implementado utilizando la formulación de Hamilton, con parámetros físicos reales del sistema (longitudes, masas, inercias y centros de masa).

Las trayectorias de seguimiento deseadas fueron del tipo senoidal, derivables en el tiempo, generadas para cada articulación, cuyas expresiones correspondientes son:

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101
This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

$$q_{1d}(t) = 0.5\sin(t), \quad (15)$$
$$q_{2d}(t) = 0.3\sin(1.5t), \quad (16)$$

con velocidades deseadas

$$\dot{q}_{1d}(t) = 0.5\cos(t), \quad (17)$$
$$\dot{q}_{2d}(t) = 0.45\cos(1.5t). \quad (18)$$

El momentum deseado se calculó utilizando la matriz de inercia evaluada en la trayectoria deseada, de acuerdo con:

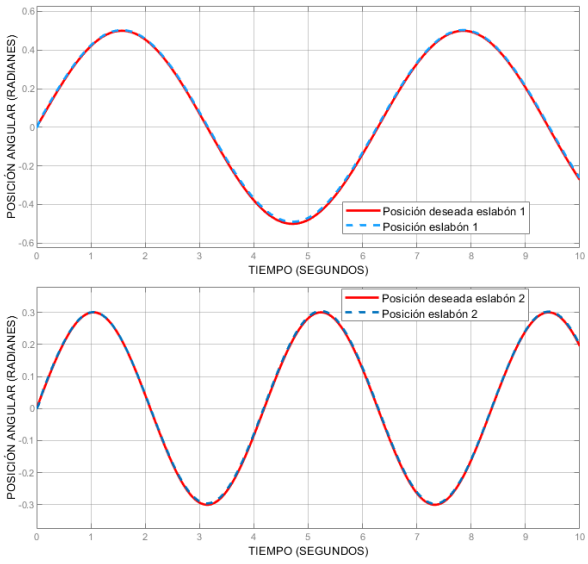
$$p_d(t) = M[q_d(t)]\dot{q_d}(t). \quad (17)$$

El desempeño del controlador fue verificado mediante el análisis de los resultados en el monitoreo de las posiciones, velocidades y momentum en ambos eslabones, además de corroborar que los torques requeridos en el manipulador estuvieran dentro de los límites paramétricos de los motores correspondientes a cada articulación.

3.1 Seguimiento de la trayectoria deseada

En la Figura 5, se observa un seguimiento preciso de las trayectorias deseadas por parte de ambas articulaciones. La respuesta del sistema es prácticamente indistinguible de la referencia, sin error en régimen permanente y con un error transitorio inicial despreciable. Este comportamiento indica una excelente sintonización de las ganancias proporcional y derivativa del controlador, así como una correcta compensación del término no lineal a través del gradiente Hamiltoniano. El controlador actúa de manera simultánea sobre posición y momentum, corrigiendo el error en coordenadas generalizadas mediante una realimentación proporcional y disipada.

Figura 5
Seguimiento de la trayectoria deseada

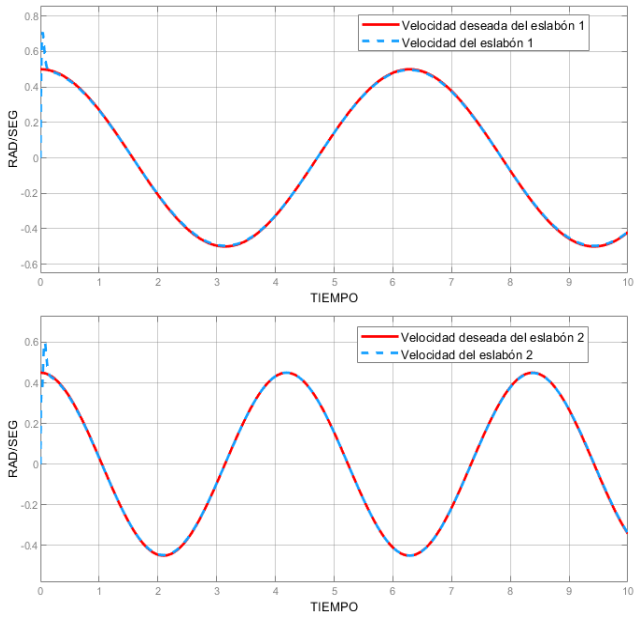


Además, la convergencia hacia la trayectoria deseada ocurre rápidamente, con tiempos de establecimiento inferiores a 1 segundo para ambas articulaciones. La evolución suave de las señales también confirma la correcta sintonización de las ganancias K_p y K_d, así como el término de compensación del gradiente de energía potencial.

3.2 Seguimiento de la velocidad deseada

En la Figura 6, se muestra el comportamiento de la velocidad articular en comparación con la derivada de la trayectoria deseada. La evolución de $\dot{q}(t)$ coincide casi perfectamente con $\dot{q}_d$ especialmente después del primer segundo. El ligero sobreimpulso en $\dot{q}(t)$ durante el arranque está relacionado con la diferencia entre el estado inicial real del sistema y el estado energético deseado, y desaparece rápidamente debido al efecto del término disipativo, específicamente en el momentum. Esto valida que el control del momentum indirectamente garantiza el seguimiento de la velocidad sin necesidad de un observador o un lazo adicional de derivada.

Figura 6
Seguimiento de la velocidad deseada



3.3 Evolución del momentum conjugado

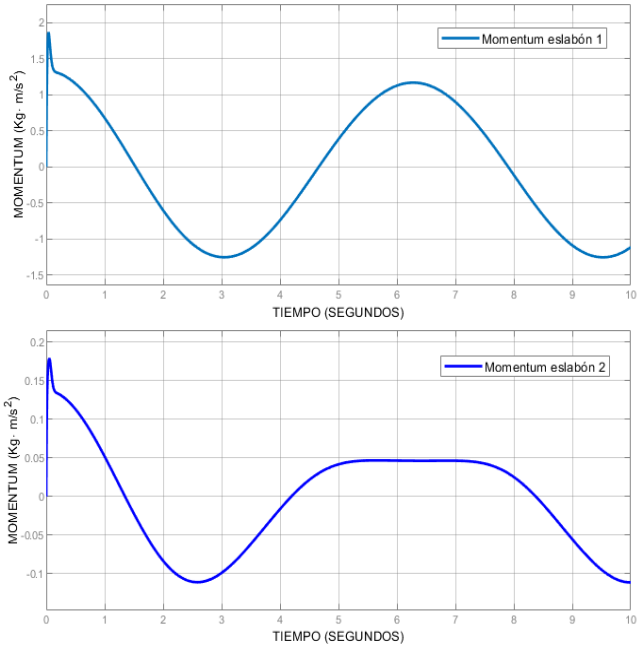
En la Figura 7, se representa la evolución temporal del momentum $p(t)$ para ambos eslabones. Se aprecia que la magnitud del momentum responde con continuidad, y presenta una fase inicial de ajuste que decae rápidamente. Esta fase representa la corrección de la diferencia entre el estado inicial del sistema y la dinámica deseada. Para el eslabón 1, el momentum alcanza amplitudes mayores debido a la mayor carga inercial y a la mayor amplitud de movimiento. Para el eslabón 2, el comportamiento es más atenuado, reflejando la diferencia estructural entre los brazos. En ambos casos, la respuesta es estable, sin oscilaciones de alta frecuencia ni desbordamientos, lo que indica una correcta compensación no lineal y un diseño

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101
This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Año: 2025. Volumen: 1. Numero:11 ISSN: 2448-623X

robusto del control. La forma de onda observada en la simulación muestra que: para el eslabón 1, el momentum alcanza valores de mayor magnitud y presenta una modulación armónica con mayor energía. Esto se debe al mayor momento de inercia del primer eslabón, sumado a su mayor amplitud de trayectoria. El sistema requiere mayor cantidad de movimiento acumulado para compensar tanto su masa como su configuración geométrica. Para el eslabón 2, el comportamiento del momentum es más atenuado, con oscilaciones suaves, lo cual concuerda con la menor masa, menor longitud y amplitud de movimiento. Este eslabón, al estar ubicado en el extremo de la cadena cinemática, contribuye con menor inercia relativa. El comportamiento de ambos momentum refleja fielmente la distribución de masa, el acoplamiento no lineal del sistema, y el cumplimiento de la ley de conservación de energía estructurada.

Figura 7
Evolución del momentum conjugado



3.4 Torques aplicados a las articulaciones

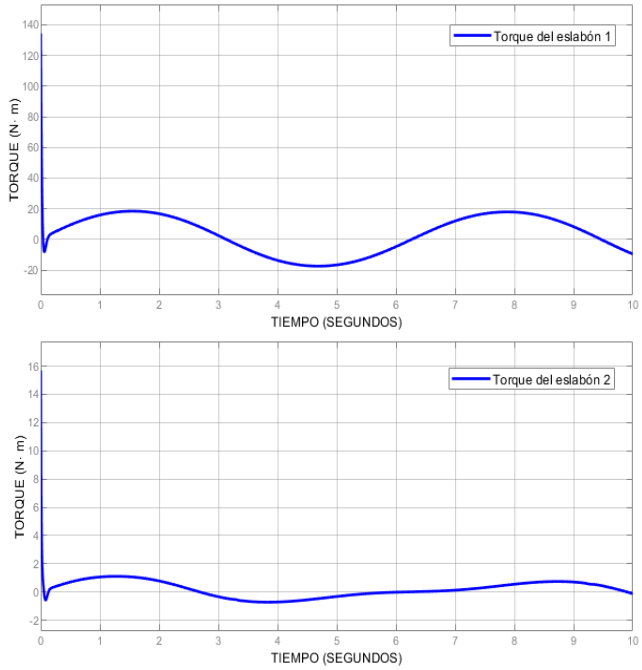
En la Figura 8, se muestra la evolución temporal de los torques de control $\tau(t)$ aplicados a cada eslabón del robot manipulador de dos grados de libertad. Es importante recordar que el torque aplicado se compone de tres términos: uno disipativo, uno restaurador proporcional y uno de compensación energética no lineal. El primer término $(-K_d(p - p_d)$ actúa como amortiguador artificial, disipando energía proporcional al error de momentum. El segundo término $(-K_p(q - q_d)$ proporciona una fuerza de restauración virtual, compensando alguna desviación en la posición angular.

En los resultados numéricos obtenidos, se puede observar que:

- El torque del eslabón 1 oscila entre aproximadamente $\pm 25N \cdot m$, lo cual es coherente con su mayor masa, inercia y amplitud de movimiento angular. Las características del eslabón 1 conducen directamente a una necesidad de un par de accionamiento mayor. Además, durante el inicio de movimiento se puede observar que el torque inicial máximo se mantiene por debajo de los límites físicos del motor, el cual puede entregar hasta $150\ N \cdot m$.
- El torque del eslabón 2 oscila permanece dentro del rango $\pm 15N \cdot m$, reflejando su menor participación dinámica debido a su ubicación geométrica dentro del robot, además de menores parámetros tales como masa, centro de masa e inercia. Durante el transitorio inicial se observa que el torque del eslabón 2 alcanza una magnitud que se mantiene por debajo del límite, el cual es de $20\ N \cdot m$

La forma de ambas señales de torque es suave, libre de picos o discontinuidades, y modulada por la dinámica no lineal del sistema. Esto es una consecuencia directa de utilizar una formulación estructurada que respeta el acoplamiento entre grados de libertad. La evolución del torque de control confirma que la ley Hamiltoniana propuesta es físicamente eficiente y energéticamente coherente, permitiendo realizar seguimiento preciso de trayectorias sin exceder los límites mecánicos del sistema. Este desempeño validado por simulación respalda el uso de la formulación Hamiltoniana como una estrategia de control robusta, estructuralmente compatible con la física del manipulador, y viable para implementación real con actuadores convencionales.

Figura 8
Torques aplicados a las articulaciones



https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101

This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Año: 2025. Volumen: 1. Numero:11 ISSN: 2448-623X

3.4 Análisis de error de posición y velocidad

A continuación se analizan las gráficas obtenidas de los errores de posición $\tilde{q}$ y velocidad $\dot{p}$, para ambos eslabones del robot manipulador.

El análisis conjunto de los errores de posición y velocidad demuestra de forma contundente la efectividad del controlador propuesto basado en la formulación Hamiltoniana. Las gráficas muestran que el sistema logra un seguimiento de trayectoria de alta precisión (Figura 9), con errores de posición acotados en todo momento por debajo de los ±0.012 radianes, lo que equivale a desviaciones angulares inferiores a un grado, incluso durante las transiciones transitorias iniciales.

Asimismo, el error de velocidad (Figura 10) se mantiene dentro de rangos controlados, convergiendo rápidamente hacia una dinámica sincronizada con la trayectoria deseada. La suavidad de las curvas observadas en ambas variables, sin presencia de sobrepasos abruptos, saturaciones ni distorsiones, confirma que el sistema no solo es estable, sino que opera dentro de un régimen energéticamente coherente y estructuralmente amortiguado. Este comportamiento se alinea con el análisis de estabilidad realizado en secciones previas y refleja una adecuada elección de las ganancias de control, además de validar la hipótesis central del trabajo: que una estrategia de control diseñada directamente sobre las ecuaciones de Hamilton puede garantizar desempeño preciso, robustez y estabilidad energética en manipuladores robóticos multivariable sin necesidad de recurrir a linealizaciones o compensaciones artificiales.

Figura 9
Errores de posición

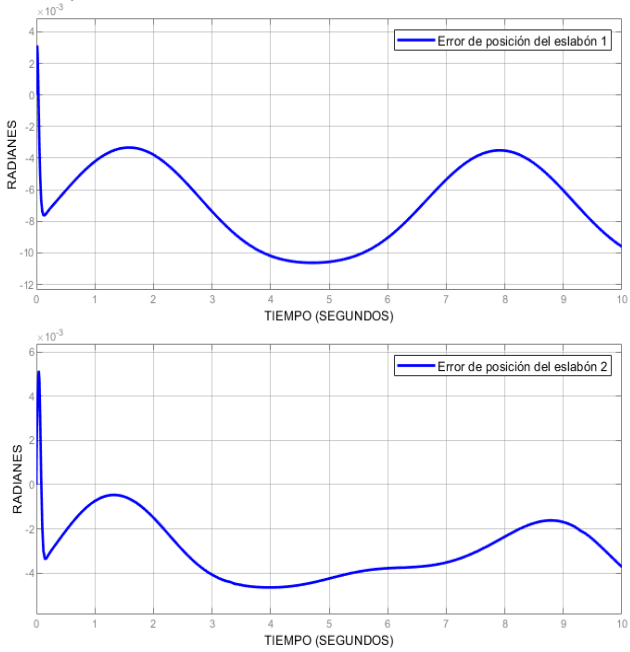
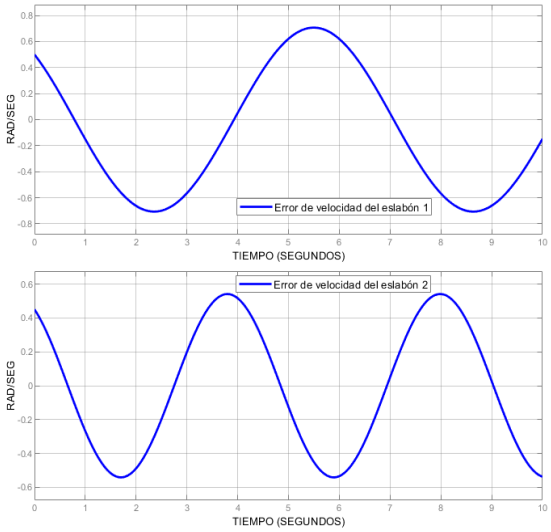


Figura 10
Errores de velocidad



IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se propuso, desarrolló e implementó una estrategia de control multivariable basada en la formulación Hamiltoniana, orientada al control simultáneo de la posición, velocidad y momentum conjugado de un robot manipulador planar de dos grados de libertad.

La principal contribución radica en el diseño de una ley de control estructurada, que incorpora un lazo proporcional sobre el error de posición, un lazo derivativo formulado sobre el error de momentum y un término compensador en función del gradiente de energía. Las simulaciones numéricas, implementadas en MATLAB/Simulink, validaron el correcto desempeño del controlador ante trayectorias deseadas suaves y acopladas. El sistema logró un seguimiento preciso sin requerir observadores adicionales ni linealizaciones locales. El análisis de resultados confirmó:

- El seguimiento eficiente de las posiciones y velocidades deseadas.
- La convergencia del momentum hacia su referencia energética.
- La generación de torques suaves, físicamente viables, sin saturación ni efectos transitorios no deseados.

Desde el punto de vista físico, el controlador actuó como un sistema disipativo pasivo estructurado, con inyección de amortiguamiento artificial directamente sobre las variables conjugadas. Este enfoque garantiza no solo estabilidad asintótica, sino también una interpretación energética clara del comportamiento transitorio y estacionario del sistema. Además, la formulación propuesta presenta una alta escalabilidad hacia manipuladores con mayor número de grados de libertad, así como potencial de extensión hacia esquemas adaptativos, robustos o Hamiltonianos por puerto.

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101
This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Año: 2025. Volumen: 1. Numero:11 ISSN: 2448-623X

Como líneas de trabajo futuras se plantea la implementación del controlador de manera experimental, la incorporación de perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas y la extensión hacia robots con diversas configuraciones.

V. AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al Instituto Tecnológico Superior de Lerdo por el respaldo institucional brindado durante el desarrollo de esta investigación.
Así mismo, se agradece al Instituto Tecnológico de La Laguna, específicamente a la División de Estudios de Posgrado e Investigación, por las facilidades otorgadas a los autores.
Finalmente, se reconoce el valioso respaldo financiero por parte de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), cuyo apoyo ha sido fundamental para el desarrollo de los estudios de investigación en el área de control no lineal aplicado a manipuladores robóticos. Su contribución ha permitido fortalecer las capacidades tecnológicas y de innovación en el ámbito de la ingeniería avanzada.

VI. REFERENCIAS

Altawaitan, A., Stanley, J., Ghosal, S., & Duong, T. (2024). *Hamiltonian dynamics learning from point cloud observations for nonholonomic mobile robot control*. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA).

Beckers, T., & Colombo, A. (2023). *Physics-informed neural network design for energy-based control of nonlinear systems*. Automatica, 153, 110909. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.110909

Chang, H. S., Halder, U., Shih, C. H., Naughton, N., Gazzola, M., & Mehta, P. G. (2023). *Energy-shaping control of a muscular octopus arm moving in three dimensions*. Proceedings of the Royal Society A, 479(2270), 20220593. https://doi.org/10.1098/rspa.2022.0593

Gong, Y., Liu, C., Chen, W., Zhao, D., & Song, J. (2023). *Passive control strategy for autonomous excavators based on energy shaping*. IEEE Transactions on Industrial Electronics. https://doi.org/10.1109/TIE.2023.3299986

Heydari Shahna, M., Bahari, M., & Mattila, J. (2023). *Robustness-guaranteed observer-based control strategy with modularity for cleantech EMLA-driven heavy-duty robotic manipulator*. arXiv preprint arXiv:2311.15843.

Hu, J., Wang, F., Li, X., Qin, Y., Guo, F., & Jiang, M. (2024). *Trajectory tracking control for robotic manipulator based on soft actor–critic and generative adversarial imitation learning*. Biomimetics, 9(12), 779.

Khader, S. A., Yin, H., Falco, P., & Kragic, D. (2021). *Learning deep energy shaping policies for stability-guaranteed manipulation*. arXiv preprint arXiv:2103.16432.

Liu, Z., Peng, K., Han, L., & Guan, S. (2023). *Modeling and control of robotic manipulators based on artificial neural networks: A review*. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering, 47, 1307–1347.

Mao, W., Xu, C., Zhu, Q., Chen, S., & Wang, Y. (2023). *Leapfrog diffusion model for stochastic trajectory prediction*. Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 5517–5526.

Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., & Maschke, B. (2001). *Putting energy back in control*. IEEE Control Systems Magazine, 21(2), 18–33.

Rudin, N., Hoeller, D., Reist, P., & Hutter, M. (2022). *Learning to walk in minutes using massively parallel deep reinforcement learning*. Conference on Robot Learning (CoRL), 91–100.

Schulman, J., Wolski, F., Dhariwal, P., Radford, A., & Klimov, O. (2017). *Proximal policy optimization algorithms*. arXiv preprint arXiv:1707.06347.

Tinoco, V., Silva, M. F., Santos, F. N., Morais, R., & Magalhães, S. A. (2025). *A review of advanced controller methodologies for robotic manipulators*. International Journal of Dynamics and Control, 13, 36.

Van der Schaft, A. J. (2017). *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control* (3rd ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-49950-3

Zhang, A., Karacan, K., Sadeghian, H., Wu, Y., Wu, F., & Haddadin, S. (2024). *Tactile-Morph Skills: Energy-based control meets data-driven learning*. arXiv preprint arXiv:2408.12285.

https://doi.org/10.62805/cid2025.CID101

This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/