Año: 2022 Volumen: 1
Número 8, ISSN: 2448-623X

Control Bang-Bang de n-grados de libertad para su implementación en robótica

U. Uriostegui-Legorreta[1]

***Resumen*—La interacción humano-robot constituye un campo de investigación amplio. Este trabajo de investigación surge como respuesta al problema que existe en el área de control al proponer funciones candidatas de Lyapunov que se utilizan para probar la estabilidad del sistema e implementar controladores, ya que no existe un método adecuado para hacer el cálculo de las funciones de Lyapunov para el control bang-bang. En la literatura se conocen sistemas de uno y dos grados de libertad que se controlan mediante control bang-bang, la dificultad que se presenta al utilizar este control para muchos grados de libertad es complejo, consiste en buscar los máximos y mínimos de las funciones de Lyapunov de cada grado de libertad para encontrar el tiempo mínimo. Por ello, se propone un método para el cálculo de las funciones de Lyapunov mediante la teoría de Hamilton para sistemas de n-grados de libertad para su implementación en el control bang-bang. Se realizan simulaciones numéricas y la implementación del controlador para un brazo manipulador de dos y cuatro grados de libertad, aplicando este método propuesto al control bang-bang.**

Palabras claves—control Bang-Bang, control no lineal, hamiltonianos, brazos robóticos

***Abstract*—The human-robot interaction is a broad field of research. This research work arises as a response to the problem that exists in the control area when proposing candidate Lyapunov functions that are used to test the stability of the system and implement controllers, since there is no adequate method to calculate the Lyapunov functions for bang-bang control. In the literature there are known systems of one and two degrees of freedom that are controlled by bang-bang control, the difficulty that arises when using this control for many degrees of freedom is complex, it consists of finding the maxima and minima of the Lyapunov functions of each degree of freedom to find the minimum time. Therefore, a method for calculating Lyapunov functions using Hamilton's theory for n-degrees of freedom systems is proposed for implementation in bang-bang control. Numerical simulations and the implementation of the controller for a manipulator arm with two and four degrees of freedom are carried out, applying this proposed method to the bang-bang control.**

Keywords—Bang-Bang control, nonlinear control, hamiltonians, robot arms

I. Introducción

Actualmente el uso cotidiano de robots en la industria, investigación y cada vez más en los hogares hace del campo de la robótica un área de oportunidad para el desarrollo de nuevas teorías, controladores y aplicaciones de los diferentes tipos de robots. Los sistemas electromecánicos y robóticos se utilizan en numerosas aplicaciones de la vida diaria en la actualidad, estos sistemas son modelados mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. En este formalismo, se utilizan las coordenadas generalizadas para desarrollar el control del sistema. Dentro de los formalismos más importantes en la mecánica clásica se encuentran el formalismo de Lagrange y de Hamilton. El formalismo de Lagrange se basa en resolver n ecuaciones de segundo orden (ecuaciones de Lagrange) para obtener las ecuaciones de movimiento; mientras que el formalismo de Hamilton consiste en resolver $2n$ ecuaciones de primer orden, lo que parece contraproducente. No obstante, existen ventajas al trabajar con el enfoque hamiltoniano; por ejemplo, el conjunto de transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton es más amplio que el que existe en la mecánica lagrangiana. Si bien la mayor parte del análisis de sistemas físicos se ha realizado dentro del formalismo lagrangiano y hamiltoniano. Varios autores abordan la formulación de hamiltonianos para el control de sistemas mecánicos en el espacio fase utilizando álgebra matricial y cálculo tensorial. En la teoría de control, un controlador bang-bang (controlador de encendido y apagado) es un controlador de retroalimentación que cambia abruptamente entre dos estados [1]. En problemas de control óptimo, a veces se da el caso de que un control está restringido a estar entre un límite inferior y uno superior. Si el control óptimo cambia de un extremo al otro (es decir, estrictamente nunca está entre los límites), entonces ese control se denomina solución bang-bang [2]. Los controles bang-bang surgen con frecuencia en problemas de tiempo mínimo. Por ejemplo, si se desea que un coche que parte del reposo llegue a una determinada posición en el menor tiempo posible, la solución es aplicar la máxima aceleración y luego aplicar el máximo frenado para llegar a descansar exactamente en la posición deseada. Las soluciones bang-bang también surgen cuando el

[1] *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Av. Francisco J. Mújica S/N Ciudad Universitaria, C.P. 58060, Morelia, Michoacán, México.*
* ulises.fismat@gmail.com

Año: 2022 Volumen: 1
Número 8, ISSN: 2448-623X

hamiltoniano es lineal en la variable de control; la aplicación del principio mínimo o máximo de Pontryagin conducirá entonces a empujar el control a su límite superior o inferior dependiendo del signo del coeficiente del control U en el hamiltoniano [3]. En resumen, los controles bang-bang son en realidad controles óptimos en algunos casos, aunque también se implementan a menudo por simplicidad o conveniencia. El propósito de este trabajo es describir un nuevo método del cálculo de funcionales tras observar las limitaciones que presenta la teoría de Hamilton y el calculo de las funciones de Lyapunov para sistemas dinámicos con cierto grado de complejidad. Existen varias formas de calcular funcionales de sistemas de ecuaciones diferenciales (sistemas dinámicos), sin embargo no se ha generalizado un método para ello, por ejemplo; las funciones de Lyapunov no dependen explícitamente del tiempo y no hay métodos definitivos para obtenerlas; el formalismo de Hamilton es deducido basándose en sistemas conservativos, aun cuando las ecuaciones se pueden forzar para encontrar hamiltonianos de algunos sistemas disipativos [4,5]. En la literatura se conocen sistemas de uno o dos grados de libertad utilizando control bang-bang, para muchos grados de libertad es muy complejo calcular los hamiltonianos o funciones de Lyapunov relacionadas con cada grado de libertad. Por ello se persigue el objetivo de crear un método a partir de la transformada de Legrende para el cálculo de los hamiltonianos de manera recursiva para cada grado de libertad del sistema.

II. Parte Técnica del Artículo

En esta sección, se presenta una breve introducción a los conceptos y el desarrollo matemático del formalismo lagrangiano y hamiltoniano. Se describe el método recursivo para el cálculo de los hamiltonianos.

A. Formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano

La mecánica hamiltoniana fue formulada por primera vez por William Rowan Hamilton en 1833, a partir de la mecánica lagrangiana, una reformulación previa de la mecánica clásica introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. La ecuación de Euler-Lagrange en forma matricial de un sistema electromecánico o robótico viene dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \tag{1}$$

donde $M(q)$, $C(q,\dot{q})$, $G(q)$ y τ representan la matriz de inercia, la matriz de Coriolis, la gravedad y el torque respectivamente. La ecuación clásica de Euler-Lagrange viene dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{2}$$

donde $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema se calcula como la diferencia entre la energía cinética K y energía potencial V de la siguiente manera

$$L = K - V. \tag{3}$$

En mecánica clásica se usa la transformada de Legendre para derivar la formulación hamiltoniana partiendo de la formulación lagrangiana, y viceversa [6]. Eso es posible, puesto que la función lagrangiano que aparece en el formalismo lagrangiano es una función explícita de las coordenadas posicionales q_i y las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$. Por su parte la función de Hamilton o hamiltoniano que aparece en la formulación hamiltoniana es función explícita de las coordenadas y los momentos generalizados. El punto importante es que los momentos pueden ser obtenidos como derivadas del lagrangiano:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{4}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{5}$$

con lo cual se puede construir el hamiltoniano a partir del lagrangiano. En esas condiciones el hamiltoniano viene dado como transformación de Legendre del lagrangiano:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{6}$$

Para mostrar que el hamiltoniano es una constante del movimiento para un sistema autónomo, lo escribimos en términos del lagrangiano y calculamos su derivada total respecto al tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \sum\left(\dot{p}_i\dot{q}_i + p_i\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}, \tag{7}$$

Sea $H(q_i, p_i, t)$, el diferencial total de H es:

$$dH = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \tag{8}$$

$$dH = \sum\left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \tag{9}$$

$$dH = \sum(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \tag{10}$$

$$dH = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt, \tag{11}$$

$$dH = \sum(\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{12}$$

Si identificamos el coeficiente de dq_i y dp_i, donde se obtienen las siguientes relaciones

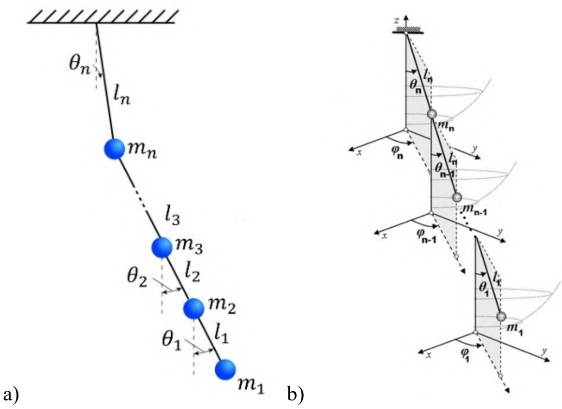
$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j},\ \ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},\ \ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{13}$$

La ecuación expresa que si H no depende explícitamente del tiempo, entonces es una cantidad que se conserva.

B. Hamiltoniano recursivo n-grados de libertad para el control bang-bang

El hamiltoniano total del sistema se puede calcular a partir de la transformada de Legrende,

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \tag{14}$$



a) b)

Figura 1. a) Péndulo planar de n-grados de libertad; b) Péndulo esférico de $2n$-grados de libertad

Para el control bang-bang de un péndulo planar de n-grados de libertad (ver Figura 1. a)), se ocupa calcular n hamiltonianos y n señales de control U_i para cada grado de libertad que tenga el sistema, se propone una manera de obtener los n hamiltonianos de manera recursiva [7].

$$H_n = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)\right), \tag{15}$$
$$H_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-2} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)\right), \tag{16}$$
$$\vdots$$
$$H_2 = \left(\sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)\right) - \left(p_1 \dot{q}_1 - L(q_1, \dot{q}_1)\right), \tag{17}$$
$$H_1 = p_1 \dot{q}_1 - L(q_1, \dot{q}_1). \tag{18}$$

La suma de los H_i nos da el hamiltoniano total del sistema.

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i. \tag{19}$$

Los hamiltonianos recursivos deben cumplir la condición $H_i(0) = 0$, calculamos los hamiltonianos en funciones de las señales de control U_i para cada grado de libertad. El hamiltoniano $H_i(q_i, p_i, U_i)$ calculado dependerá también de la señal de control U_i, se le aplicará el principio de mínimo o máximo de Pontryagin para obtener dos hamiltonianos, un máximo y un mínimo, por lo que se tendrán $2n$ hamiltonianos, n serán máximos y n mínimos.

$$H_i(q_i, p_i, U_i) = H_i - b_i U_i. \tag{20}$$

Las señales de control U_i para el control bang-bang se obtienen a partir de los hamiltonianos de la siguiente manera

$$U_i = if\ H(e)_{1,i} > H(e)_{2,i}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$

donde $e_i = q_i - q_{ref\,i}$ es el error, $q_{ref\,i}$ representa la referencia a donde se desea controlar cada grado de libertad q_i del sistema.

Este modelo se puede generalizar a péndulos esféricos, donde en cada unión se tienen dos grados de libertad θ_i y φ_i como se muestra en la Figura 1. b). El lagragiano correspondiente al péndulo esférico de $2n$-grados de libertad está dado por

$$L\left(\dot{\varphi}_n, .., \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_n, .., \dot{\theta}_1, \varphi_n, .., \varphi_1, \theta_n, .., \theta_1\right) = K - V, \tag{21}$$
$$K = K\left(\dot{\varphi}_n, .., \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_n, .., \dot{\theta}_1, \varphi_n, .., \varphi_1, \theta_n, .., \theta_1\right), \tag{22}$$
$$V = V(\varphi_n, .., \varphi_1, \theta_n, .., \theta_1). \tag{23}$$

El hamiltoniano total del sistema es

$$H = K + V. \tag{24}$$

Se tienen que calcular los hamiltonianos en cada unión, H_1 corresponde al hamiltoniano de un péndulo esférico simple, H_2 es el hamiltoniano de un péndulo esférico doble, así respectivamente se calculan los H_i de cada unión del sistema.

$$H_n = H_n\left(\dot{\varphi}_n, .., \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_n, .., \dot{\theta}_1, \varphi_n, .., \varphi_1, \theta_n, .., \theta_1\right),$$
$$H_{n-1} = H_{n-1}\left(\dot{\varphi}_{n-1}, .., \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_{n-1}, .., \dot{\theta}_1, \varphi_{n-1}, .., \varphi_1, \theta_{n-1}, .., \theta_1\right),$$
$$H_{n-2} = H_{n-2}\left(\dot{\varphi}_{n-2}, .., \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_{n-2}, .., \dot{\theta}_1, \varphi_{n-2}, .., \varphi_1, \theta_{n-2}, .., \theta_1\right),$$
$$\vdots$$
$$H_2 = H_2\left(\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1, \varphi_2, \varphi_1, \theta_2, \theta_1\right),$$
$$H_1 = H_1\left(\dot{\varphi}_1, \dot{\theta}_1, \varphi_1, \theta_1\right).$$

Todos los hamiltonianos que se calculan en cada unión H_i dependen de dos grados de libertad θ_i y φ_i.

$$H_n = H - H_{n-1}, \tag{25}$$
$$H_{n-1} = H_{n-1} - H_{n-2}, \tag{26}$$
$$H_{n-2} = H_{n-2} - H_{n-3}, \tag{27}$$
$$\vdots$$
$$H_2 = H_2 - H_1, \tag{28}$$
$$H_1 = H_1. \tag{29}$$

Cada hamiltoniano H_i está relacionado con dos grados de libertad θ_i y φ_i, cuando se tienen dos grados de libertad en cada unión vamos a separar el hamiltiano H_i en otros dos hamiltonianos

$$H_i = H_{\varphi_i} + H_{\theta_i}. \tag{30}$$

En total se van a tener $2n$ hamiltonianos del todo el sistema.

III. Resultados

En esta sección, aplicamos el control derivado de la transformada de Legendre, donde se implementa el control bang-bang a partir de calcular los hamiltonianos asociados al sistema a controlar. Se realizan simulaciones numéricas para un brazo manipulador de dos y cuatro grados de libertad a partir del modelo de un péndulo doble y un péndulo esférico doble, aplicando el método propuesto para el control bang-bang.

A. *Péndulo doble*

El lagrangiano asociado al péndulo doble es

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + (m_1+m_2)gl_2\cos(\theta_2) + m_1 g l_1\cos(\theta_1). \quad (31)$$

La ecuación de Euler-Lagrange de un sistema robótico o electromecánico está dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = bU. \quad (32)$$

Calculando las matrices y los hamiltonianos asociados al péndulo doble.

$$I = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 & m_1 l_1 l_2\cos(\theta_2-\theta_1) \\ m_1 l_1 l_2\cos(\theta_2-\theta_1) & m_1 l_1^2 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1) \\ -m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$G = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_2\cos(\theta_2) \\ m_1 g l_1\cos(\theta_1) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

El hamiltoniano del péndulo doble es

$$H = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl_2\cos(\theta_2) - m_1 g l_1\cos(\theta_1). \quad (36)$$

Al tener un sistema con dos grados de libertad se deben tener dos hamiltonianos, un hamiltoniano para cada señal de control. A partir de la transformada de Legendre se obtiene el hamiltoniano total del péndulo doble, por lo que se plantea resolver este problema utilizando el hamiltoniano recursivo. Un péndulo doble se puede ver que en el extremo es un péndulo simple, por lo que un hamiltoniano corresponde a un péndulo simple y el segundo hamiltoniano a la resta del hamiltoniano del péndulo doble menos el hamiltoniano del péndulo simple.

$$H_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl_2\cos(\theta_2). \quad (37)$$

$$H_1 = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1\cos(\theta_1). \quad (38)$$

Las funciones H_1 y H_2, se les aplicará el principio de mínimo o de máximo de Pontryagin para obtener dos hamiltonianos, un máximo y un mínimo para cada función por lo que en total se tendrán cuatro hamiltonianos, donde también hay que tomar en cuenta la condición $H_i(0) = 0$.

$$H_{1\theta_1} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1(1-\cos(e_1)) - b_1 e_1 \quad U_1 = +1, \quad (39)$$

$$H_{2\theta_1} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1(1-\cos(e_1)) + b_1 e_1 \quad U_1 = -1, \quad (40)$$

$$H_{1\theta_2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(1-\cos(e_2-e_1)) - (m_1+m_2)gl_2(1-\cos(e_2)) - b_2 e_2 \quad U_2 = +1, \quad (41)$$

$$H_{2\theta_2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(1-\cos(e_2-e_1)) - (m_1+m_2)gl_2(1-\cos(e_2)) + b_2 e_2 \quad U_2 = -1. \quad (42)$$

Las señales de control se obtienen de la siguiente manera al evaluar los hamiltonianos (ver Figura 2 y 4).

$$U_1 = if\ H_{1\theta_1} > H_{2\theta_1}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$
$$U_2 = if\ H_{1\theta_2} > H_{2\theta_2}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$

donde $e_1 = \theta_1 - \theta_{ref\,1}$ y $e_2 = \theta_2 - \theta_{ref\,2}$ son los errores, $\theta_{ref\,1} = 20°$ y $\theta_{ref\,2} = 30°$ corresponden a las referencias a donde se desea controlar el sistema (ver Figura 3 y 5).

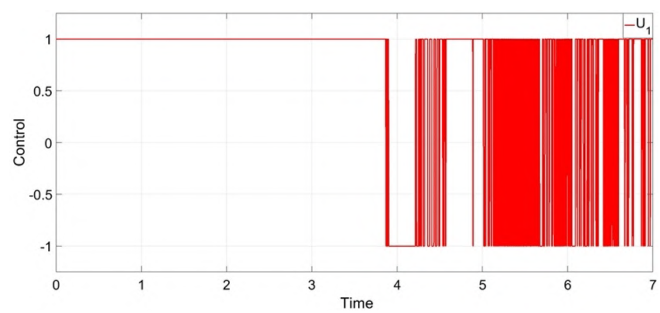


Figura 2. Control U_1 para controlar el ángulo θ_1

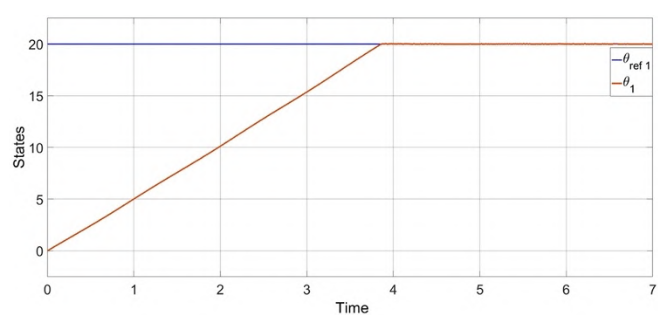


Figura 3. Evolución temporal del ángulo θ_1

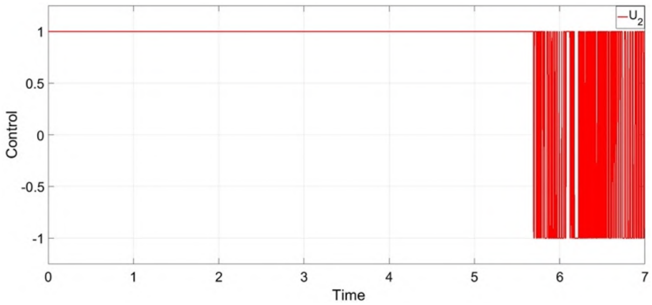


Figura 4. Control U_2 para controlar el ángulo θ_2

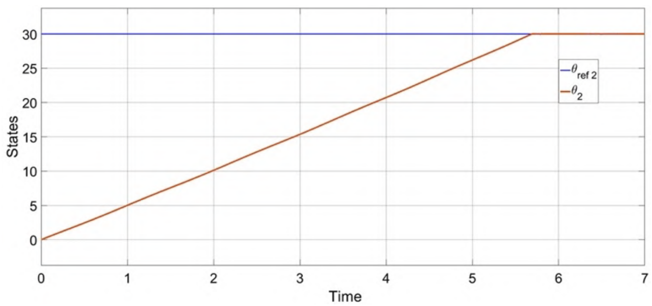


Figura 5. Evolución temporal del ángulo θ_2

B. *Péndulo esférico doble*

El lagrangiano asociado al péndulo esférico doble es

$$L = K - V, \tag{43}$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2(\dot{\theta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2\theta_2) + \frac{1}{2}m_1 l_1^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2\sin^2\theta_1)$$
$$+m_1 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$+m_1 l_1 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\theta}_2\dot{\varphi}_1\cos\theta_2\sin\theta_1 - \dot{\theta}_1\dot{\varphi}_2\sin\theta_2\cos\theta_1)$$
$$+m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{44}$$

$$V = -(m_1+m_2)g l_2\cos\theta_2 - m_1 g l_1\cos\theta_1. \tag{45}$$

El hamiltoniano del péndulo esférico doble es

$$H = K + V. \tag{46}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del lagrangiano del sistema del péndulo esférico doble, mediante la transformada de Legrende se calcula el hamiltoniano total del sistema y de manera recursiva se van calculando los hamiltonianos en cada unión. El sistema tiene cuatro grados de libertad, a partir del hamiltoniano total H del sistema obtenemos cuatro hamiltonianos para cada de libertad, donde obtenemos

$$H_1 = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1\cos\theta_1, \tag{47}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$+m_1 l_1 l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$+m_1 l_1 l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)(\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_2\sin\theta_1 - \dot{\varphi}_2\dot{\theta}_1\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$-(m_1+m_2)g l_2\cos\theta_2, \tag{48}$$

$$H_3 = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2(\dot{\varphi}_1^2\sin^2\theta_1), \tag{49}$$

$$H_4 = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2(\dot{\varphi}_2^2\sin^2\theta_2). \tag{50}$$

Los hamiltonianos obtenidos H_1, H_2, H_3 y H_4 se le aplica el principio de mínimo o de máximo de Pontryagin para tener un máximo y un mínimo para cada función por lo que en total se tendrán ocho hamiltonianos, donde también hay que tomar en cuenta la condición $H_i(0) = 0$.

$$H_{1\theta_1} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1(1-\cos(e_1)) - b_1 e_1 \quad U_1 = +1, \tag{51}$$

$$H_{2\theta_1} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1(1-\cos(e_1)) + b_1 e_1 \quad U_1 = -1, \tag{52}$$

$$H_{1\theta_2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin e_1\sin e_2$$
$$+m_1 l_1 l_2\,(1-\cos(e_4-e_3))(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos e_1\cos e_2)$$
$$+m_1 l_1 l_2\,(1-\cos(e_4-e_3))(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin e_3\sin e_4)$$
$$+m_1 l_1 l_2\sin(e_4-e_3)(\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_2\cos e_2\sin e_1 - \dot{\varphi}_2\dot{\theta}_1\sin e_1\cos e_2)$$
$$-(m_1+m_2)g l_2\cos e_2 - b_2 e_2 \qquad U_2 = +1, \tag{53}$$

$$H_{2\theta_2} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_1 l_1 l_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin e_1\sin e_2$$
$$+m_1 l_1 l_2\,(1-\cos(e_4-e_3))(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos e_1\cos e_2)$$
$$+m_1 l_1 l_2\,(1-\cos(e_4-e_3))(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin e_3\sin e_4)$$
$$+m_1 l_1 l_2\sin(e_4-e_3)(\dot{\varphi}_1\dot{\theta}_2\cos e_2\sin e_1 - \dot{\varphi}_2\dot{\theta}_1\sin e_1\cos e_2)$$
$$-(m_1+m_2)g l_2\cos e_2 + b_2 e_2 \qquad U_2 = -1, \tag{54}$$

$$H_{1\varphi_1} = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2(\dot{\varphi}_1^2\sin^2(e_1)) - b_3 e_3 \qquad U_3 = +1, \tag{55}$$

$$H_{2\varphi_1} = \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2(\dot{\varphi}_1^2\sin^2(e_1)) + b_3 e_3 \qquad U_3 = -1, \tag{56}$$

$$H_{1\varphi_2} = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2(\dot{\varphi}_2^2\sin^2(e_2)) - b_4 e_4 \qquad U_4 = +1, \tag{57}$$

$$H_{2\varphi_2} = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_2^2(\dot{\varphi}_2^2\sin^2(e_2)) + b_4 e_4 \qquad U_4 = -1. \tag{58}$$

Las señales de control se obtienen de la siguiente manera al evaluar los hamiltonianos (ver Figuras 6, 8, 10 y 12).

$$U_1 = if\ H_{1\theta_1} > H_{2\theta_1}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$
$$U_2 = if\ H_{1\theta_2} > H_{2\theta_2}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$
$$U_3 = if\ H_{1\varphi_1} > H_{2\varphi_1}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$
$$U_4 = if\ H_{1\varphi_2} > H_{2\varphi_2}\ \ then\ -1\ \ else\ \ 1$$

donde $e_1 = \theta_1 - \theta_{ref\,1}$, $e_2 = \theta_2 - \theta_{ref\,2}$, $e_3 = \varphi_1 - \varphi_{ref\,1}$ y $e_4 = \varphi_2 - \varphi_{ref\,2}$ son los errores, $\theta_{ref\,1} = 25°$, $\theta_{ref\,2} = 20°$, $\varphi_{ref\,1} = 15°$ y $\varphi_{ref\,2} = 30°$ corresponden a las referencias a donde se desea controlar el sistema (ver Figuras 7, 9, 11 y 13).

Año: 2022 Volumen: 1
Número 8, ISSN: 2448-623X

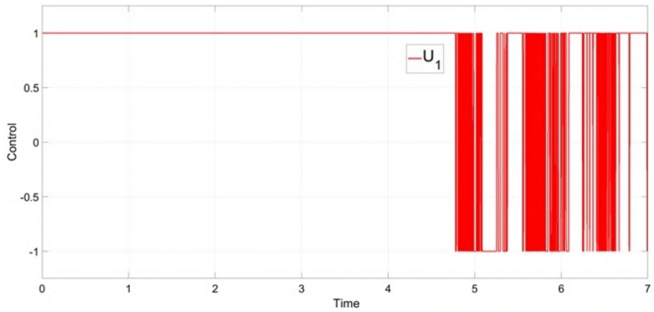


Figura 6. Control U_1 para controlar el ángulo θ_1

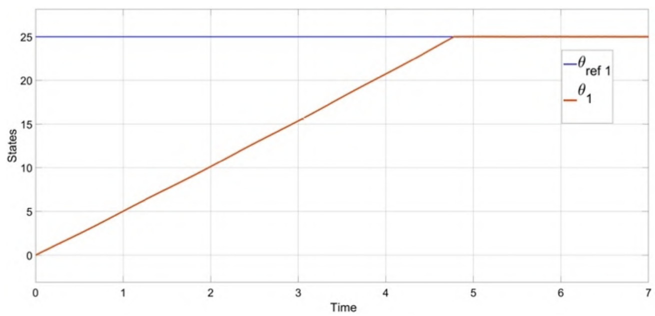


Figura 7. Evolución temporal del ángulo θ_1

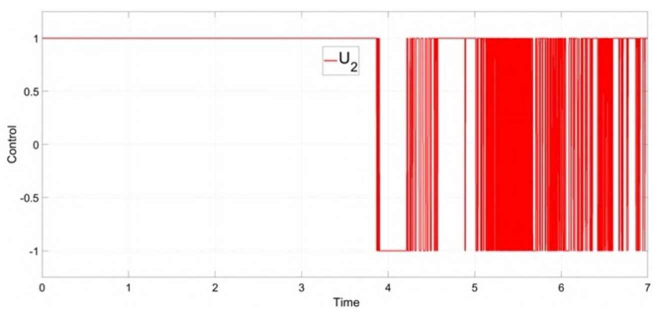


Figura 8. Control U_2 para controlar el ángulo θ_2

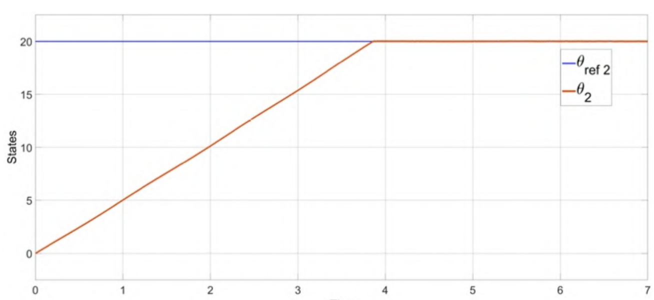


Figura 9. Evolución temporal del ángulo θ_2

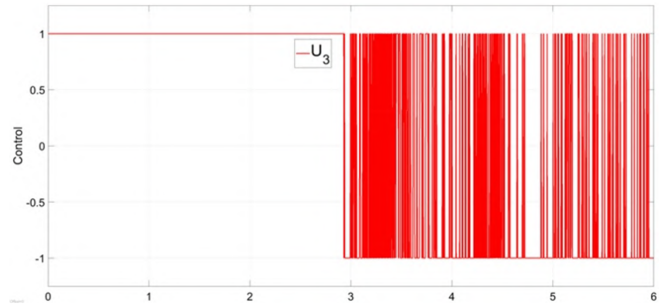


Figura 10. Control U_3 para controlar el ángulo φ_1

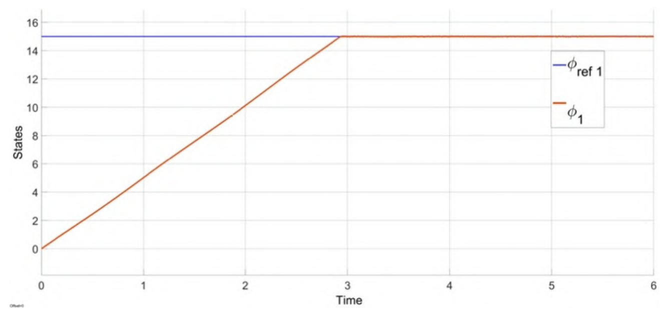


Figura 11. Evolución temporal del ángulo φ_1

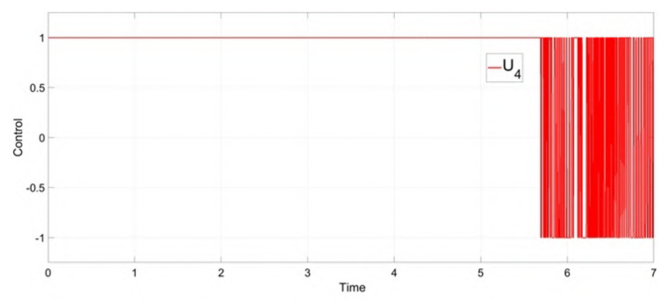


Figura 12. Control U_4 para controlar el ángulo φ_2

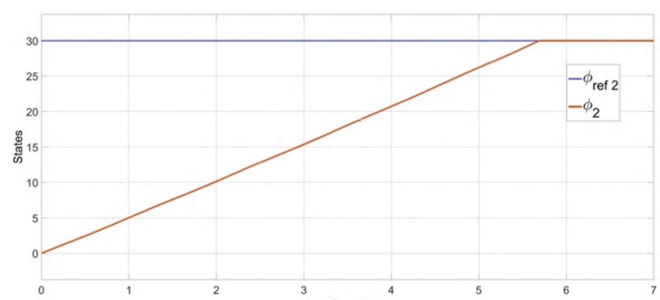


Figura 13. Evolución temporal del ángulo φ_2

Año: 2022 Volumen: 1
Número 8, ISSN: 2448-623X

IV. Discusión, Conclusión y Recomendaciones

A. Discusión

Existen varias formas de calcular funcionales de sistemas dinámicos, sin embargo no se ha generalizado un método para ello, el formalismo de Hamilton es deducido basándose en sistemas conservativos, aun cuando las ecuaciones se pueden forzar para encontrar hamiltonianos de algunos sistemas disipativos. El propósito de este trabajo es describir una nueva técnica del cálculo de funcionales tras observar las limitaciones que se presenta al proponer las funciones candidatas de Lyapunov para el control bang-bang para sistemas dinámicos muchos grados de libertad. Para ello hacemos uso de la teoría de Hamilton y la teoría de control de sistemas dinámicos, esto nos permite desarrollar y abordar el objetivo de crear un método a partir de la transformada de Legrende para el cálculo de los hamiltonianos de manera recursiva y logrando obtener un algoritmo que nos ayude a calcular el controlador del sistema de manera relativamente sencilla.

B. Conclusión

La dificultad que se presenta al utilizar este control para muchos grados de libertad es complejo debido a que se debe encontrar el tiempo mínimo de las funciones candidatas de Lyapunov. Con nuestro método logramos obtener esas funciones, calculando los hamiltonianos de manera recursiva y aplicando el principio de mínimo o máximo de Pontryagin que se utiliza en la teoría de control óptimo para encontrar el mejor control posible para llevar a un sistema dinámico de un estado a otro, logramos calcular los máximos y mínimos de las funciones de cada grado de libertad. Se implementó este método para un sistema de dos y cuatro grados de libertad, calculando los hamiltonianos correspondientes para así obtener las señales de control para cada grado de libertad, se realizaron simulaciones numéricas de este método propuesto logrando controlar los sistemas mediante el control bang-bang. En este trabajo, se muestra la importancia del hamiltoniano en la teoría de control, se centra para aplicaciones de brazos manipuladores de robots. Calculamos los hamiltonianos, la dinámica y los controladores aplicados, utilizando la teoría de Hamilton. Usando el método propuesto podemos calcular los hamiltonianos para cada unión de la articulación. Gracias a este método es posible calcular recursivamente los hamiltonianos e implementarlo para aplicaciones de control de brazos manipuladores de robots de n-grados de libertad. Como resultado, podemos aplicar controladores locales a cada articulación.

C. Recomendaciones

Las dificultades que se pueden presentar al realizar las simulaciones numéricas para sistemas dinámicos de muchos grados de libertad es el tiempo de cómputo. El control bang-bang es un control óptimo donde su principal característica es encontrar el tiempo mínimo para llevar a un sistema dinámico de un estado a otro. Matemáticamente o dentro de un contexto informático puede que no haya problemas, pero la realización física de los sistemas de control bang-bang da lugar a varias complicaciones, es un controlador de 2 pasos (encendido y apagado) que cambia abruptamente entre dos estados, estos cambios de estados se realizan a frecuencias altas para mantener el sistema controlado, la implementación física puede estar limitado a las características del hardware utilizado.

V. Agradecimientos

U. Uriostegui-Legorreta agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero brindado durante la realización de este proyecto. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMNSH), me brindó todo el apoyo durante mi estancia posdoctoral.

VI. Referencias

[1] Kamien, M., Schwartz, N. (1991). “Discontinuous and Bang-Bang Control”. Dynamic Optimization: The Calculus of Variances and Optimal Control in Economics and Management, 2nd ed, Amsterdam: North-Holland pp. 202-208.

[2] Sonneborn, L., Van, F. (1965). “The Bang-Bang Principle for Linear Control Systems”. *SIAM J. Control,* Vol. 2 pp.151-159.

[3] Artstein, Z. (1980). “Discrete and continuous bang-bang and facial spaces, or: Look for the extreme points”. *SIAM Review,* Vol. 22(2) pp. 172-185.

[4] Marion, J.B. (1950). Classical Dynamics of Particles and Systems, 5nd ed. Thomson pp. 228-271.

[5] Mendoza, S. (2012) "Hamiltonianos en sistemas disipativos" Tesis de Licenciatura. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

[6] Goldstein, H. (2002). Classical Mechanics, 3nd ed., Ed. Addison Wesley pp. 334-355.

[7] Uriostegui, U. (2020) "Métodos Geométricos para Hamiltonianos Generalizados y Transformadas Integrales" Tesis de Doctorado. Departamento de Ingeniería Eléctrica Control Automático, CINVESTAV, Unidad Guadalajara.

VII. Biografía

Uriostegui-Legorreta Ulises. Nació en Lázaro Cárdenas Michoacán el 15 de enero de 1990. Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas por la UMSNH, Morelia Michoacán en 2013. Maestro en Ciencias en Ingeniería Física por la UMSNH, Morelia Michoacán en 2015. Doctorado en Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control Automático por el CINVESTAV Unidad Guadalajara Jalisco en 2020. Actualmente realiza estancia posdoctoral en el Posgrado en Ciencias en Ingeniería Física en la UMSNH donde se encuentra trabajando, junto a otros investigadores en la línea de investigación de Modelado en la cual se desarrolla dinámica no lineal y caos. Su línea de investigación es: robótica, control no lineal, sistemas dinámicos y caos.