

Transformada z y la Convolución Discreta Aplicada al Estudio de una Inversión Financiera

A. Rodríguez Franco¹, C.U. Flores Prince², C. Ríos Marmolejo²

Resumen— Este documento tiene como objetivo revisar tres alternativas sobre cómo analizar la evolución de un sistema dinámico discreto de primer orden utilizando tres procedimientos: primero, utilizando un procedimiento iterativo; segundo, utilizando la operación de convolución discreta; y tercero, utilizando una transformación lineal conocida como la Transformada z, esta transformación lineal se utiliza para el estudio de señales y sistemas discretos. Este documento puede ser estudiado por ingenieros eléctricos, electrónicos y mecatrónicos. El sistema a estudiar es típico de la vida cotidiana. Una comparación de resultados se hace de las tres maneras.

Palabras claves— Convulsión, Función de transferencia, Inversión financiera, Señal muestra unitaria, Sistema discreto, Transformada z.

Abstract— This document aims to review three alternatives on how to analyze the evolution of a first-order discrete dynamic system using three procedures: first, using an iterative procedure; second, using the discrete convolution operation; and third, using a linear transformation known as the z-Transform, this linear transformation is used for the study of discrete signals and systems. This document can be studied by electrical, electronic and mechatronic engineers. The system to study is typical of everyday life. A comparison of results is done in all three ways.

Keywords— Convolution, Discrete system, Financial investment, Transfer function, Transformed z, Unitary sample signal.

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas discretos es un área del conocimiento actual que posee relevancia debido a que los sistemas digitales tecnológicos y sus correspondientes aplicaciones cobran día a día más usuarios y adeptos [1],[2],[4],[5]. Qué podría tener de dificultad analizar una inversión financiera con las herramientas tecnológicas actuales. Analizar los sistemas en el dominio del tiempo es una opción obligada de manera natural, pero desde la

concepción de Fourier [2],[3],[5] que propone una alternativa para estudiar el comportamiento de sistemas temporales pero usando como intermediario a otro dominio, el de la frecuencia. Merece atención especial esta idea, motivada por las facilidades que brinda el realizar diversas operaciones que evitan la ejecución de procesos iterativos [3].

Las aplicaciones programáticas diseñadas para dispositivos computacionales, son utilizadas cada día más por las personas que tengan o no un suficiente soporte académico, dichas aplicaciones se han masificado con la popularidad que han alcanzado las computadoras, tabletas y celulares inteligentes. Una inversión financiera formal está circunscrita para un ambiente de personas estudiosas de las Ciencias Económico Administrativas [6],[7],[8] y [9]. Trabajar las inversiones considerándolas como un sistema dinámico discreto resulta novedoso y como tal reviste una utilidad metodológica con moderadas dosis de innovación.

II. PARTE TÉCNICA DEL ARTÍCULO

Cualquier inversión financiera debe contemplar los siguientes datos: Capital de inicio, tasa o interés, tiempo de duración y retiro de efectivo. Al final de un periodo se tendrá un saldo modificado por los parámetros involucrados y actualizados. Con la intención de realizar pronósticos se concibe una fórmula que volverá a ejecutarse los periodos que sean necesarios. Esta fórmula se muestra de manera iterativa en la expresión (1).

$$\text{Saldo}_n := \text{Saldo}_{n-1} + \text{interés} \text{Saldo}_{n-1} - b \quad (1)$$

En (1) se observa que Saldo_n es el saldo del capital en el valor presente n; saldo_{n-1} representa el saldo en el periodo inmediato anterior; interés es la tasa que al multiplicarse por saldo_{n-1} representan los réditos ganados por la inversión en un periodo n y b representa la cantidad que se dispone al término de un periodo, podría denominarse “cantidad retirada para manutención”.

Una inversión financiera, se propone en este estudio, concebirla como un sistema discreto y como tal, su tratamiento naturalmente se realiza en el dominio del

1,2 Tecnológico Nacional de México,
1 Instituto Tecnológico de la Laguna,
2 Instituto Tecnológico Superior de Lerdo,
Comarca Lagunera, Estados de Coahuila y Durango, México.
abel.r.f@hotmail.com, cufprince@yahoo.com.mx,
cesar_rimc@hotmail.com.

tiempo. Sin embargo en este trabajo se propone también considerar el estudio del comportamiento de una inversión financiera pero en el dominio de la frecuencia. Ver figura 1.

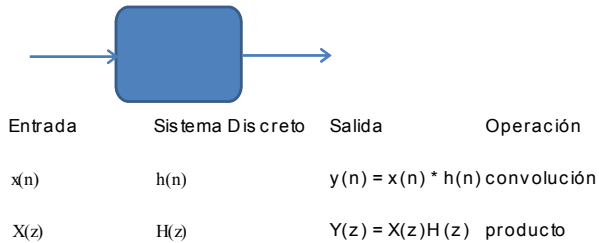


Figura 1. Inversión Financiera esquematizada como un sistema discreto usando el dominio n y el dominio z .

En el dominio del tiempo la entrada es $x(n)$, la representación del sistema $h(n)$ se le llama respuesta a la muestra unitaria [1], la salida es $y(n)$ y la operación a realizar en el dominio del tiempo se llama convolución [1], [2], [5].

En el dominio de la frecuencia a la entrada se le conoce como $X(z)$, la representación del sistema es $H(z)$ y se le llama Función de Transferencia (FDT), y a la salida se le llama $Y(z)$.

En la figura 1 se resalta la correspondiente operación que se debe realizar si se desea obtener el valor de la salida $y(n)$ ó $Y(z)$.

En el dominio del tiempo el sistema financiero es descrito en su comportamiento temporal por la ecuación de diferencias no homogénea dada por (2).

$$y(n) = y(n - 1) + a \cdot y(n - 1) - b \cdot \Phi(n - 1) \quad (2)$$

Donde se distingue a un escalón unitario definido por (3) aunque en (2) se requiere que el escalón unitario esté retardado en una unidad ya que se toman utilidades de efectivo al término del período n .

$$\Phi(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

Para detallar la expresión (2) en ella se debe considerar como entrada a la cantidad que afecta el saldo; es decir, a la toma de utilidades se le debe llamar $x(n)$, así la

expresión (2) se modifica a la expresión (4)

$$y(n) = y(n - 1) + a \cdot y(n - 1) - x(n) \quad (4)$$

Obteniendo la transformada z directa a la expresión (4) y buscando expresar la razón entre la salida $Y(z)$ entre la entrada $X(z)$ se obtendrá la Función de Transferencia (FDT) dada por $H(z)$ y expresada en (5).

$$H(z) = \frac{z}{z - (1 + a)} \quad (5)$$

La correspondiente respuesta a la muestra unitaria de $H(z)$ se le llama Transformada z Inversa y viene dada por (6).

$$h(n) := (1 + a)^n \cdot \Phi(n) \quad (6)$$

Observando la figura 1 se podría obtener la salida del sistema discreto de dos maneras: en el dominio del tiempo usando la operación convolución discreta dada por (7) y obteniendo la transformada z inversa del producto entre la transformada directa z de la entrada y la FDT; es decir usando (8).

$$\text{convolución}(n) = \sum_{m=0}^N x(m) \cdot h(n - m) \quad (7)$$

$$y(n) = Z^{-1}\{X(z) \cdot H(z)\} \quad (8)$$

III. RESULTADOS

En este documento se deberán conciliar los resultados de las expresiones (1), usando procedimiento iterativo. En segundo término empleando (7); es decir, considerando a una inversión como un sistema discreto pero estudiándolo en el dominio del tiempo mediante la convolución discreta. Y en tercera instancia, considerando a una inversión como un sistema discreto pero analizándolo en el dominio de la frecuencia empleando transformada z directa e inversa; es decir, se propone usar (8). Con la intención de someter a prueba la aseveración principal de este documento se asignan los siguientes supuestos a los parámetros:

Capital de inicio: 800000

Interés: 8.25%

Retiro para manutención: 3000

Tiempo normalizado: $n=0,1,2,3 \dots n$ es el mes presente

Horizonte de prueba: los próximos 5 años.

$Sald_{q_0} := 800000$ interés := 8.25

$$Sald_{q_n} := Sald_{q_{n-1}} + \frac{\text{interés} \cdot Sald_{q_{n-1}}}{100} - 3000$$

Al realizar la corrida iterativa se obtienen los resultados empleando (1) y se muestran en la figura 2.

	0	
45	931320.562	
46	934723.391	
47	938149.614	
48	941599.393	
49	945072.889	$Sald_{q_8} = 820487.92$
50	948570.265	
51	952091.685	
52	955637.316	A final de los 5 años se tendría 984984.13 pesos
53	959207.322	
54	962801.873	
55	966421.135	
56	970065.281	$Sald_{q_{60}} = 984894.13$
57	973734.48	
58	977428.904	
59	981148.728	
60	984894.125	

Figura 2. Corrida iterativa mostrando resultados y haciendo algunas anotaciones.

Con los mismos parámetros pero utilizando (7) se obtiene la convolución discreta en el dominio temporal normalizado.

$$\text{convoluci3(n)} := \sum_{m=0}^{60} x(m) \cdot h(n - m)$$

En la figura 3 se indican algunos resultados específicos para diferentes valores de n con la intención de hacer comparaciones entre los tres procedimientos. Se usó la fórmula de la convolución dada por la ecuación (7).

convoluci3(n) =

931320.562
934723.391
938149.614
941599.393
945072.889
948570.265
952091.685
955637.316
959207.322
962801.873
966421.135
970065.281
973734.48
977428.904
981148.728
984894.125

convoluci3(5) = 800000

convoluci3(8) = 820487.924

convoluci3(60) = 984894.125

Figura 3 Realización empleando la fórmula de la convolución discreta. Se indican valores para diferentes valores de n.

Por último, usando la expresión (8) se obtienen los resultados mostrados en la figura 4 y en la figura 5.

ENTRADA dominio n $80000x(n) - b \cdot \Phi(n - 1)$

ENTRADA dominio z $\frac{-(80000 - 80000a + b)}{(-1 + z)}$

FDT del sistema discreto

$$\frac{z}{z - (1 + a)}$$

PRODUCTO EN EL DOMINIO z

$$\frac{-(80000 - 80000a + b)}{(-1 + z)} \cdot \frac{z}{z - (1 + a)}$$

TRANSFORMADA z INVERSA

$$\left[\frac{b + 80000(1 + a)^n \cdot a - b \cdot (1 + a)^n}{a} \right]$$

Figura 4 Procedimiento usando un cambio de dominio temporal n al dominio z, realizando el producto en el dominio z, y obteniendo la transformada z inversa.

IGUALANDO A LA SALIDA DEL SISTEMA en el dominio temporal n

$$y(n) := \frac{[b + 80000(1 + a)^n \cdot a - b \cdot (1 + a)^n]}{a}$$

$$y(0) = 800000$$

$$y(8) = 820487.924$$

$$y(60) = 984894.125$$

Figura 5. Igualando la transformada z inversa a la función de salida del sistema discreto en el dominio n.

IV. DISCUSIÓN, CONCLUSIÓN Y RECOMENDACIONES

Empleando los tres procedimientos y especificando los mismos parámetros por los tres caminos se obtuvieron los mismos resultados de pronóstico de saldo para todo valor de n. Se hace hincapié en tres valores específicos del saldo para hacer un comparativo por las tres vías: valor inicial del saldo; es decir, el capital de inicio o condiciones iniciales en el instante cero. También se cuantifica el saldo en el mes ocho y por último se cuantifica en el mes número sesenta. Empleando la fórmula iterativa, usando la convolución discreta y realizando el uso de la transformada z se valida que se obtienen por los tres caminos cantidades idénticas.

Se validaron alrededor de catorce ejecuciones más que no se reportan en este documento. En esos casos se modificaron los distintos parámetros y en todas las pruebas se obtuvieron resultados equivalentes por las tres alternativas. Tales corridas no se presentan en este documento pero se encuentran a disposición de quien lo requiera.

Los procedimientos que no emplean a la transformada z requieren localidades de memoria y reutilización de tales localidades. Sin embargo el uso de la transformada z permitió obtener una fórmula que para evaluarla sólo hay que aplicarla directamente sin necesidad de la utilización de localidades de memoria; puede verse que se consumió esfuerzo de análisis pero se obtuvo el beneficio de una fórmula de aplicación directa. Debe aceptarse que al usar la transformada z se obtiene una fórmula de fácil ejecución.

Dentro de las diversas pruebas realizadas se usaron las adecuaciones para que también el sistema financiero sea estudiado como un sistema homogéneo; es decir, sin considerar “retiros para mantenimiento”, pero de igual

manera se obtuvieron resultados equivalente por los tres caminos.

Precaución: en el caso general descrito aquí se considera a un sistema discreto dinámico no homogéneo y se consideró como entrada x(n) a la cantidad de retiro con “fines de mantenimiento”, esto podría fácilmente confundir al lector preguntándose cómo es que una entrada al sistema dinámico en realidad es una salida de dinero. Fue indispensable esta consideración para hacer cuadrar todos los resultados por las tres vías diferentes. Ver figura 6.

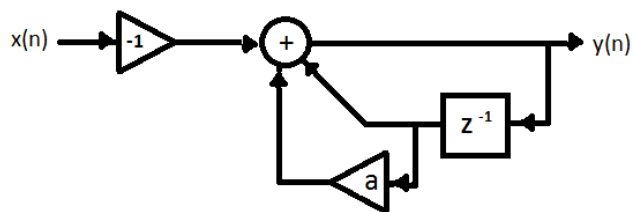


Figura 6. Gráfica del sistema discreto no homogéneo o Función de Transferencia del sistema de Estudio. Ver ecuación (4).

Como una herramienta de validación para las tres opciones se empleó una aplicación de programación para realizar eventos matemáticos, pero de similar forma se podría usar cualquier aplicación que sea capaz de realizar operaciones básicas y que sea capaz de obtener la transformación de dominio temporal directo de n a z y la transformación inversa de dominio; es decir, de z a n. Algunas opciones recomendadas serían Mathematica, Matlab, PTC Mathcad, Derive, entre otros.

Por último al observar la figura 7 se aprecia que el comportamiento de los tres conjuntos de valores coinciden al graficarlos. En la figura 7 se ilustra el comportamiento dentro de todo el horizonte limitado a sesenta meses y en la figura 8 se realizó un acercamiento a la figura 7, “zoom”, donde se aprecia la reiteración de la coincidencia.

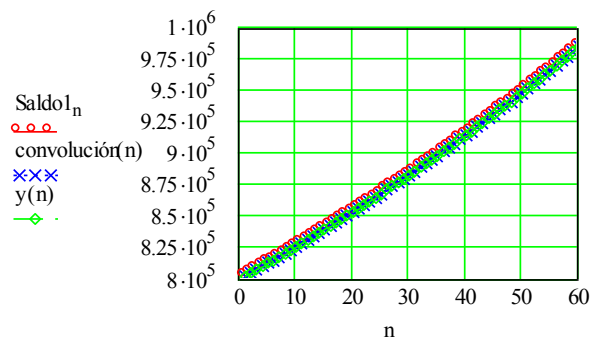


Figura 7. Gráfica del comportamiento comparativo de los tres conjuntos de datos obtenidos por tres vías distintas de análisis. Gráfica que incluye un horizonte de 60 meses.

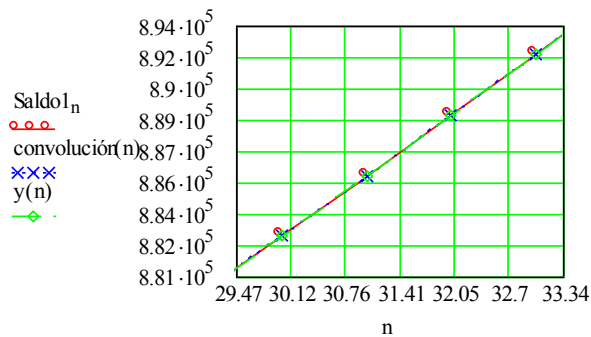


Figura 8 Acercamiento de la gráfica de la figura 7 enfocando los meses desde el 29 al 33.

Es ineludible comentar que resulta gratificante aplicar dos procedimientos tan áridamente teóricos como lo son la transformación lineal z así como la convolución discreta a una actividad típica de la vida diaria como lo es el análisis del comportamiento dinámico de una inversión financiera.

V. AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Tecnológico Nacional de México, al Instituto Tecnológico de la Laguna y al Instituto Tecnológico Superior de Lerdo por las facilidades prestadas a los autores para la realización y divulgación del presente trabajo.

VI. REFERENCIAS

- [1] Mitra, Sanjit K. (2001). Digital Signal Processing, A computer-Based Approach. New York NY: McGraw-Hill, Inc.
- [2] Oppenheim, Alan V. Willsky, Alan S. Young, Ian T. (1994). Señales y Sistemas. México Méx.: Prentice Hall Hispanoamericana.
- [3] Wailey, C. R. (1969). Matemáticas Superiores para Ingeniería. México Méx.: McGraw-Hill, Inc.
- [4] Vaccaro, Richard J. (1995). Digital Control, A State-Space Approach. USA: McGraw-Hill, Inc.
- [5] Oppenheim, Alan V. Willsky, Alan S. Young, Nawab, S. Hamid (1998). Señales y Sistemas. México Méx.: Prentice Hall Hispanoamericana.
- [6] Blank, Leland. Tarquin Antony. (2005). Ingeniería Económica. México. McGraw-Hill / Interamericana Editores S. A. de C. V.
- [7] Degarmo, E. Paul. Sullivan, William G., Bontadelli, James A. (1993). Engineering Economic. New York NY. Macmillan Publishing Company.
- [8] Grant, Eugene L. Grant Ireson, W. (1976). Principles of Engineering Economic. USA. John Wiley & Sons, Inc.
- [9] Sepúlveda, José A. Soufer William E. Gottfried, Byron S. (1992). Ingeniería Económica. McGraw-Hill/Interamericana de México S. A. de C. V.

VII. BIOGRAFÍAS



Flores Prince Carlos Uriel. Nació el 25 de abril del año 1972 en la ciudad de Torreón Coahuila México. Obtiene el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica por el Instituto Tecnológico de la Laguna. Torreón, Coah., México en el año de 2008. Obtiene el grado de Especialista en Automatización de Procesos industriales por el Instituto Tecnológico de Saltillo,

Saltillo Coah., México en el año 2004. Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna en el año 1998.

Él actualmente labora como jefe de división de la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico Superior de Lerdo. Las líneas académicas de interés son la Automatización de procesos y sistemas digitales.

El M. C. Carlos Uriel Flores Prince forma parte de la academia de Ingeniería Electrónica del I.T.S.L



Ríos Marmolejo César. Nació el 30 de junio del año 1971 en la ciudad de Gómez Palacio Durango México. Maestría en Ciencias de Ingeniería Eléctrica por el Instituto Tecnológico de la Laguna. Torreón, Coah., México. Especialista en Ingeniería Mecatrónica por el Instituto Tecnológico Superior de Lerdo en Cd. Lerdo, Durango, México en el año 2016. Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México en el año 1997.

Él actualmente labora como Jefe de la División de Posgrado y Docente de la Especialización en Ingeniería Mecatrónica del Instituto Tecnológico Superior de Lerdo, Cd. Lerdo. Durango, México. También ha impartido diferentes materias del área de electrónica y redes computacionales para las carreras de Ingeniería en Sistemas Computacionales y Licenciatura en Informática. Las líneas académicas de interés son Sistemas Automáticos de Control y desarrollo de sistemas computacionales.

El Ing. Ríos forma parte del consejo de posgrado del ITSL



Rodríguez Franco Abel. Nació el 6 de junio del año 1960 en la ciudad de Torreón Coahuila México. Obtiene el grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones por el CICESE, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Baja California, México en el año 1994. Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería

Industrial Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna en el año 1981.

Él actualmente labora como docente titular en el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Energías Renovables del Instituto Tecnológico de la Laguna. Las líneas académicas de interés son el Manejo de Señales Analógicas y Digitales, Sistemas Automáticos de Control y las Comunicaciones Electrónicas.

El MC Rodríguez Franco forma parte de la academia de Electrónica en el ITL.