Año: 2018 Volumen: 1
Número: 4 ISSN: 2448-623X

# Estudio de la Respuesta a los Armónicos de un Sistema Masa-Resorte

J. A. Flores-Avila[1], A. Rodríguez-Franco[2]

***Resumen*—En este artículo se presenta el análisis de la respuesta de un sistema Oscilador Mecánico ante los armónicos y, en particular, aquél en el que el sistema entra en resonancia. No obstante que la resonancia es deseable en algunos sistemas eléctricos, en general, en los sistemas mecánicos es indeseable por los daños potenciales que provoca, por lo que conocer la respuesta de los sistemas en tales circunstancias es fundamental para el buen funcionamiento de los mismos. Metodológicamente se propone utilizar la idea de analizar mediante la transformación entre dominios temporal y frecuencial.**

**Abstract-This article presents the analysis of the response of a Mechanical Oscillator system to harmonics and, in particular, the one in which the system enters into resonance. Although resonance is desirable in some electrical systems, in general, mechanical systems are undesirable because of the damage they cause, so knowing the response of systems in such circumstances is essential for the proper functioning of the system. Methodologically, it is proposed to use the idea to analyze through the transformation between temporal and frequency domains.**

***Palabras claves*— Armónicos, oscilador mecánico, resonancia, Serie de Fourier, sistema, , Transformada de Laplace,**

## I. Introducción

Uno de los primeros sistemas dinámicos que se estudian en mecánica/mecatrónica es el sistema traslacional masa resorte (M-K), conocido normalmente como oscilador mecánico, y que es un circuito formado por un resorte anclado uno de sus extremos a un soporte fijo y del otro se suspende una masa a la que se le aplica una fuerza f(t) conocida. Ver figura 1.

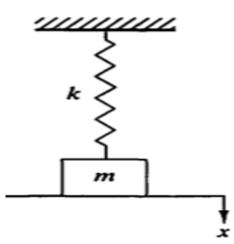


Figura 1. Sistema masa-resorte: un resorte fijo en uno de sus extremos y en el otro, una masa a la que se le aplica una fuerza f(t) y se deja vibrar libremente.

Instituto Tecnológico de la Laguna, Dpto. de Ciencias Básicas y Eléctrica-Electrónica; Bld. Revolución y C. Cuauhtémoc, Sector Centro, C.P. 27000 Torreón, Coah. México.
cidde2010@gmail.com
abel.r.f@hotmail.com

Una manera de plantear el problema, podría ser en los siguientes términos:

*Determinar la función x(t) que permite conocer la posición en todo instante de la masa m = 2 que está unida a un resorte con k = 18, partiendo del reposo y desde el punto de equilibrio se le aplica una señal de excitación dada por la función f(t):*

$$f(t) := \begin{cases} f(t+T) & \text{if } t < -\pi \\ t & \text{if } -\pi \le t \le \pi \\ f(t-T) & \text{if } t > \pi \end{cases} \qquad (1)$$

*Función periódica con período $T = 2\pi$ y frecuencia angular $\omega_o = 1$.*

*Nota: Las unidades se encuentran adecuadamente dimensionadas según el sistema en que se trabaje, sea mks, inglés u otro.*

La gráfica de la función fuerza se muestra en la figura 2

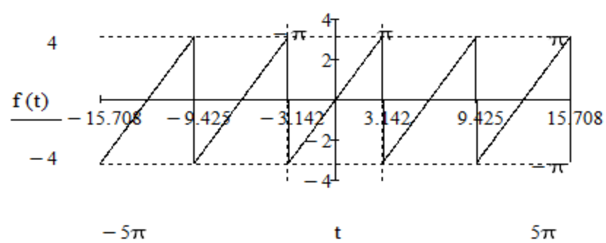


Figura 2. Gráfica de la señal de excitación aplicada al sistema masa-resorte en estudio. Señal periódica conocida como diente de sierra con período $T = 2\pi$ y frecuencia angular $\omega_o = 1$

## II. Parte Técnica del Estudio.

A. Marco Teórico.

Las leyes de la física que posibilitan la resolución del problema son:

a).- Segunda ley de Newton [1].

"La aceleración de un punto material es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre él, y tiene la dirección y sentido de dicha fuerza" y que generalmente se presenta mediante la fórmula:

$$F = ma \qquad (2)$$

b).- Ley de Hook [2].

La fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte con coeficiente de restitución k es igual al producto del coeficiente de restitución por la longitud alargada o comprimida.

Año: 2018 Volumen: 1
Número: 4 ISSN: 2448-623X

$$F = kx \qquad (3)$$

c).- Principio de D'Alembert [1].
Este principio dice que la fuerza aplicada a un sistema traslacional se distribuye entre los componentes del sistema según sus propias leyes, ver ecuación (4).

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad (4)$$

B. Proceso de resolución.
De acuerdo con el Principio de D'Alembert, la fuerza aplicada al sistema se distribuye entre la masa y el resorte:

$$f(t) = F_m + F_k \qquad (5)$$

Donde:
f(t) es la fuerza aplicada al sistema.
$F_m$ = ma: es la fuerza en la masa dada por la segunda Ley de Newton
$F_k$ = kx: es la fuerza en el resorte dada por la Ley de Hooke.

Por lo tanto:

$$f(t) = ma + kx \qquad (6)$$

Dado que la aceleración es la segunda derivada con respecto al tiempo del desplazamiento y con los valores que proporciona el problema de m = 2 y k = 18, el modelo queda dado por la ecuación diferencial (7).

$$2x''(t) + 18x(t) = f(t) \qquad (7)$$

con:
x(0) = 0 parte desde la posición de equilibrio y
x'(0) = 0 parte del reposo.

La señal de excitación está dada por la función f(t) previamente descrita en (1).

La ecuación diferencial (7) es ordinaria no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y las técnicas para resolverla son diversas.

En esta etapa se enfrenta una dificultad: la teoría para resolver una ecuación diferencial no homogénea, es aplicable siempre y cuando la función que modela la señal de excitación sea continua y derivable hasta el orden de la ecuación diferencial en el dominio de definición. Si esta condición no se cumple, los métodos estudiados no son aplicables. Éste es el caso del problema que se pretende resolver. La señal de excitación tiene puntos que pertenecen al dominio pero en los que la función no es continua y por lo tanto no es derivable, específicamente en t = (2n – 1)π. ¿Cómo resolver este inconveniente? Para solventar la dificultad mencionada se propone usar las Series de Fourier en la resolución de problemas de ingeniería como éste.

Se expresa la función de excitación, que no es derivable en t = (2n – 1)π, mediante una Serie de Fourier [3],[4] que, como se sabe, f(t) puede sustituirse como una suma infinita de términos cosenoidales que sí son derivables en todos los reales.

a) Para obtener la serie de Fourier de la función de excitación f(t) se determinan los coeficientes de Fourier.

Por las propiedades de simetría de f(t):

$A_o = 0$ y $A_n = 0$

Se determina el coeficiente $B_n$ empleando nuevamente las propiedades de simetría y se obtiene:

$$B(n) := \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$$

Por lo que la Serie de Fourier fs(t) queda dada por:

$$fs(t) := \left[\sum_{n=1}^{\infty} (B(n)\cdot\sin(n\cdot t))\right]$$

En la figura 3 se muestran las gráficas de la función original f(t) y la correspondiente serie de Fourier fs(t) tomando diez términos de la sumatoria.

Como se puede observar en la figura 3, la gráfica de fs(t) es semejante a la gráfica de la función original f(t); esta semejanza se acentúa si se consideran más términos en la serie.

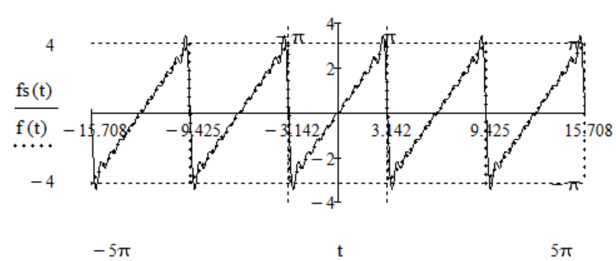


Figura 3. Gráficas sobrepuestas de la señal de excitación original f(t) y la representación alterna de la misma función mediante los primeros diez términos de la Serie de Fourier, fs(t).

b) De esta manera se tiene la señal de excitación modelada mediante una serie que sí es derivable en todo el dominio, por lo tanto, la ecuación diferencial a resolver queda expresada en (8):

$$2\cdot\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 18x(t) := 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin(n\cdot t)\right] \quad (8)$$

En lugar de abordar la solución de (7) ahora se resuelve (8). La metodología de solución es Transformar (8) del dominio t al dominio s. Se despeja X(s), para después realizar la Transformada inversa de Laplace a X(s) y obtener (9); es decir, x(t) es una función de la posición de la masa asociada al sistema m-k [5],[6].

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{n\cdot\sin(3\cdot t) - 3\cdot\sin(n\cdot t)}{3\cdot\left(n^2 - 9\right)}\right] \quad (9)$$

La gráfica de la función posición x(t) tomando diez términos de la serie se muestra en la figura 4.

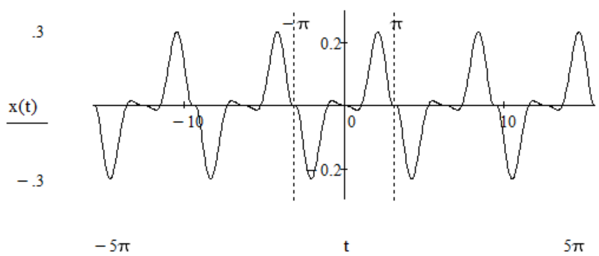


Figura 4. Gráfica de la función x(t) que proporciona la posición, en todo instante de la masa del sistema masa-resorte del problema en estudio.

C. Comentario.

Para efectos de la resolución del problema aquí termina el trabajo, ya se tiene la función x(t) que permite conocer la posición de la masa en todo instante. Sin embargo, es necesario pasar a la siguiente etapa: analizar la respuesta obtenida para conocer mejor al sistema.

## III. RESULTADOS

A. Análisis de la respuesta.

En alguna etapa del trabajo en ingeniería, después del diseño, que permite contar con la estructura y el funcionamiento del sistema, viene la etapa de la simulación, que brinda información para corroborar que efectivamente el sistema evoluciona según lo anticipado por el diseño. Al observar la gráfica de la función posición, ver figura 4, la información que se extrae es que el sistema evolucionará en el tiempo de la siguiente manera: la masa se mueve siguiendo una trayectoria oscilante (de ahí el nombre de oscilador mecánico) con un desplazamiento máximo de ± 0.23257 unidades de longitud, con ceros en $t = \pm n\pi$ y período $T = 2\pi$. De la figura 4 se puede obtener información puntual directa, puntual inversa y global.

Sin embargo, si se observa la función posición x(t) dada por (9), se detecta que se indetermina para n = 3 (tercer armónico), ya que el término ($n^2$ – 9) aparece como denominador y en el numerador los términos n*sin(3n) – 3*sin(nt) también se anulan, dando como resultado un cociente de ceros. ¿Qué información proporciona esta indeterminación y cómo afecta al sistema?

B. Resonancia.

Un sistema entra en resonancia cuando la frecuencia de la señal de excitación es igual a la frecuencia natural del sistema y es un efecto no deseado en sistemas mecánicos porque generalmente devienen en su destrucción. La frecuencia natural del sistema masa-resorte está dada por:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En el sistema la frecuencia natural es $\omega_o =$ 3 y es igual a la frecuencia de la señal de entrada para n = 3 entrando el sistema en resonancia. ¿Cuál es el efecto de esta situación en el funcionamiento del sistema? Se encuentra la respuesta a esta pregunta haciendo el análisis para este caso específico.

C. Análisis al tercer armónico.

Para este caso la ecuación diferencial que modela el sistema viene dada como se expresa en (10):

$$2\cdot\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 18x(t) = \frac{2}{3}\cdot\sin(3\cdot t) \quad (10)$$

Ya que el Coeficiente de Fourier para n = 3 es:

$$B_3 = \frac{2}{3}$$

Al resolver la ecuación diferencial (10) empleando la Transformada de Laplace Directa, despejar X(s) y posteriormente usar la Transformación Inversa, se encuentra que la posición x(t) de la masa está dada por la función (11):

$$x(t) := \left(\frac{\sin(3\cdot t)}{54} - \frac{t\cdot\cos(3\cdot t)}{18}\right)\cdot\Phi(t) \quad (11)$$

La gráfica correspondiente se ilustra en la figura 5.

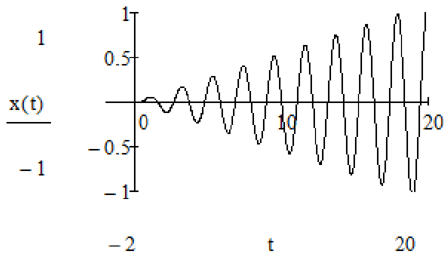


Figura 5. Gráfica de la respuesta del sistema en resonancia: la oscilación va incrementando su amplitud provocando el desbordamiento del sistema. No hay resorte que se puede estirar de manera indefinida y en tal caso restaurar sus parámetros.

La resonancia en un sistema se interpreta como una retroalimentación positiva que provoca un incremento sin control de su respuesta. Si es un sistema mecánico, como el que se está estudiando, la oscilación aumenta su desplazamiento en forma indefinida. En el sistema este efecto lo introduce el término t*cos(3t) de la respuesta, y que es un coseno cuya amplitud es proporcional al tiempo. Si es un circuito eléctrico, como una red L-C en serie o en paralelo, se presenta como un incremento sin control de la corriente o el voltaje en el circuito. En cualquier caso físicamente provocaría el desbordamiento del sistema.

En la respuesta obtenida en (9) no aparece esta componente resonante. La respuesta correcta viene dada por la suma de las funciones (12), (13) y (14):

$$x1(t) := \sum_{n=1}^{2}\left[B(n)\cdot\frac{n\cdot\sin(3t) - 3\cdot\sin(n\cdot t)}{6\cdot\left(n^2-9\right)}\right]\cdot\Phi(t) \tag{12}$$

La expresión (12) representa los primeros dos términos de la serie en los que no hay problema alguno.

$$x2(t) := \left(\frac{\sin(3\cdot t)}{54} - \frac{t\cdot\cos(3\cdot t)}{18}\right)\cdot\Phi(t) \tag{13}$$

La expresión (13) representa la respuesta del sistema al tercer armónico con n = 3 y que es el término que origina la resonancia.

$$x3(t) := \sum_{n=4}^{10}\left[B(n)\cdot\frac{n\cdot\sin(3t) - 3\cdot\sin(n\cdot t)}{6\cdot\left(n^2-9\right)}\right]\cdot\Phi(t) \tag{14}$$

.

La expresión (14) representa los términos de la serie para n mayor o igual a 4 y en los que no hay problema alguno.
La gráfica de la respuesta “correcta” se muestra en la figura 6

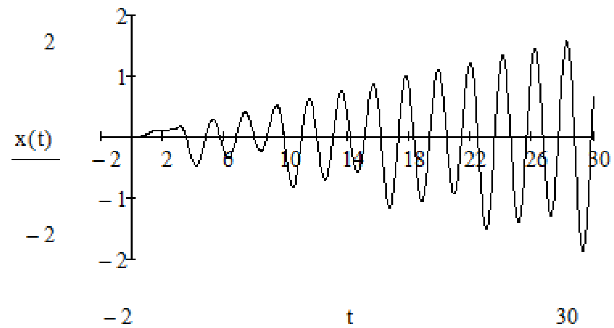


Figura 6. Gráfica de la respuesta correcta del sistema. Incluye la resonancia al tercer armónico dada por (13), más las respuestas dadas por (12) y (14).

D. Solución correcta.
El simulador dice que no hay problema y que se pude trabajar el sistema sin riesgo alguno; sin embargo, al hacer el análisis a los armónicos se detecta un funcionamiento potencialmente destructivo, de tal manera que si no se considera el sistema se colapsa.

El conflicto se soluciona evitando que el tercer armónico pase al sistema; esto se logra mediante un filtro adecuadamente dimensionado para enviar la señal de tal frecuencia a tierra. Así, el componente de la respuesta que colapsa al sistema no aparece en la respuesta final la que queda dada por la suma de los términos x1(t) + x3(t) en los que suprimimos el término que causa la resonancia:

$$x1(t) := \sum_{n=1}^{2}\left[B(n)\cdot\frac{n\cdot\sin(3t) - 3\cdot\sin(n\cdot t)}{6\cdot\left(n^2-9\right)}\right]\cdot\Phi(t)$$

$$x3(t) := \sum_{n=4}^{10}\left[B(n)\cdot\frac{n\cdot\sin(3t) - 3\cdot\sin(n\cdot t)}{6\cdot\left(n^2-9\right)}\right]\cdot\Phi(t)$$

La gráfica se muestra en la figura 7.

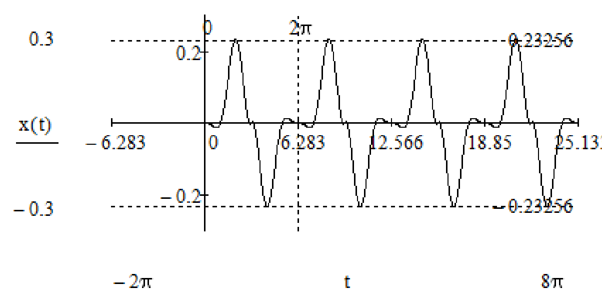


Figura 7. Gráfica de la función posición x(t); respuesta del sistema después de que se filtra el tercer armónico.

Año: 2018 Volumen: 1
Número: 4 ISSN: 2448-623X

## IV. DISCUSIÓN, CONCLUSIÓN Y RECOMENDACIONES

Una ecuación diferencial es el modelo matemático de un sistema físico en el que está presente el cambio; al resolver la ecuación diferencial, se obtiene la evolución de una variable del sistema físico; es decir, se describe su comportamiento en todo instante y, así se conoce el comportamiento futuro, para si existe algún desarrollo no deseado, entonces realizar las acciones de corrección correspondientes. Conocer la respuesta de un sistema a los armónicos posibilita evitar acciones destructivas como se mostró en este sistema masa-resorte.
Se pone a la disposición de los lectores que tengan interés una animación de la presente solución. Solicitarla a las direcciones de correo de los autores.

## V. AGRADECIMIENTOS

Se extiende un agradecimiento al jefe del Departamento de Ciencias Básicas, así como al jefe de Eléctrica Electrónica y Energías Renovables del Instituto Tecnológico de la Laguna y a las autoridades Académicas y Administrativas del Tecnológico Nacional de México por las facilidades concedidas a los autores para la divulgación de este trabajo.

## VI. REFERENCIAS

[1]. Meriam, J. L. (1991) Dinámica. Barcelona, España. Editorial Reverté, S. A. p. 4
[2]. Symon, R. K. (1968). Mecánica. Madrid, España: Edit. Aguilar. P. 44
[3]. Hsu, H. P. (1987) Análisis de Fourier. México: Edit. Addison-Wesley Iberoamericana.
[4]. Cheng, K. D. (1959). Analysis of Linear System. Tokio, Japan: Edit. Addison-Wesley.
[5]. Flores Ávila, J. A. (2017). Notas del curso de Ecuaciones Diferencial. TecNM.
[6]. Zill, D. G. (1982) Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. México: Gpo. Edit. Iberoamérica.

## VII. BIOGRAFÍA

**Flores Avila, José Agustín.** Gómez Palacio, Dgo. México. 28 de agosto de 1947. Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (1974) y Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (1987) Cd. De México, Mex. Él trabaja en el Instituto Tecnológico de la Laguna en Torreón, Coah. Mex. adscrito al Departamento de Ciencias Básicas con línea de investigación Didáctica del Cálculo y Análisis Matemático.
El M. C. Flores Ávila pertenece a la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas y participa regularmente en los Congresos de Matemáticas del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME-RELME).

**Rodríguez Franco Abel**. Nació el 6 de junio del año 1960 en la ciudad de Torreón Coahuila México. Obtiene el grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones por el CICESE, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Baja California, México en el año 1994.Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería Industrial Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna en el año 1981.
Él actualmente labora como docente titular en el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Energías Renovables del Instituto Tecnológico de la Laguna. Las líneas académicas de interés son el Manejo de Señales Analógicas y Digitales, Sistemas Automáticos de Control y las Comunicaciones.
El MC Rodríguez Franco forma parte de la academia de Electrónica en el ITL.