

Validación de una Red Eléctrica Pasiva Operada como Circuito Derivador

A. Rodríguez Franco¹, J. De la Torre Cantú², C. Ríos Marmolejo³

Resumen— En este trabajo, se presenta una red eléctrica con dos elementos pasivos capaces de operar como un bloque derivador de señales de voltaje. Se pretende que las personas interesadas en las áreas de matemáticas encuentren en este documento una realización teórica pero fácilmente validable de manera física. Así mismo, se tiene el propósito de que personas interesadas en instrumentación electrónica y eléctrica verifiquen aspectos teóricos de una manera rápida. Para la red eléctrica en cuestión, se propone una restricción para que pueda derivar. Se utilizan tres señales periódicas populares en el área de instrumentación electrónica como señales de prueba: entradas de voltaje senoidales, cuadradas y triangulares. Las mediciones en el laboratorio muestran resultados positivos en cuanto a la derivación.

Palabras claves— Derivador, escalón, frecuencia de corte, impulso.

Abstract— In this work, an electrical network with two passive elements capable of operating as a block derivative of voltage signals is presented. It is intended that people interested in the areas of mathematics find in this document a theoretical realization but easily validated in a physical way. Likewise, it is intended that people interested in electronic and electrical instrumentation verify theoretical aspects in a fast manner. For the electrical network in question, a restriction is proposed so that it can be derived. Three popular periodic signals in the area of electronic instrumentation are used as test signals: sinusoidal, square and triangular voltage inputs. The measurements in the laboratory show positive results regarding the derivation.

Keywords— Cutting frequency, derivator, impulse, step,

I. INTRODUCCIÓN

En la figura 1 se muestra la red eléctrica que se toma como caso de estudio particular.

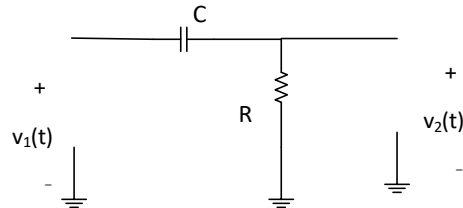


Figura 1. Diagrama de la red eléctrica en el dominio del tiempo.

Donde:

- $v_1(t)$ Señal de voltaje de entrada en el dominio del tiempo
- $v_2(t)$ Señal de voltaje de salida en el dominio del tiempo
- C Capacitor en Faradios
- R Resistor en Ohms

En la figura 2 se ilustra la misma red eléctrica cambiando de dominio de estudio t por el dominio s.

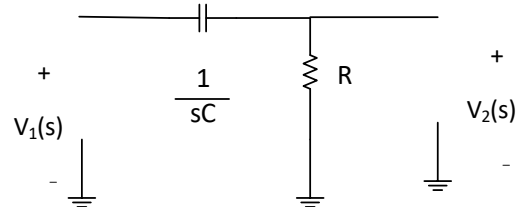


Figura 2. Diagrama de la red eléctrica en el dominio de Laplace.

Donde:

- $\frac{1}{sC}$ Impedancia del Capacitor C, unidades en ohms
- R Impedancia del Resistor R, unidades en ohms

La Función de transferencia de un sistema lineal general está dada por:

$$\text{Función de Transferencia} = \text{FDT} = G(s)$$

$$\text{Transformada de Laplace del Voltaje de Salida}$$

$$G(s) = \frac{\text{Transformada de Laplace del Voltaje de Salida}}{\text{Transformada de Laplace del Voltaje de Entrada}}$$

Condiciones Iniciales Cero

1,2,3 Tecnológico Nacional de México,
1,2 Instituto Tecnológico de la Laguna,
3 Instituto Tecnológico Superior de Lerdo,
Comarca Lagunera, Estados de Coahuila
y Durango, México.
abel.r.f@hotmail.com

Para obtener la FDT del sistema se sugiere plantear un divisor de tensión [2].

$$V_2(s) := \frac{V_1(s) \cdot R}{R + \frac{1}{s \cdot C}}$$

Planteando la razón, salida entre entrada en el dominio s, se obtiene la FDT del sistema lineal propuesto.

$$G(s) := \frac{R \cdot C \cdot s}{R \cdot C \cdot s + 1}$$

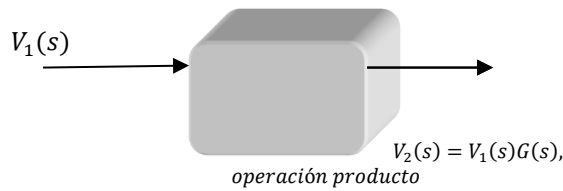
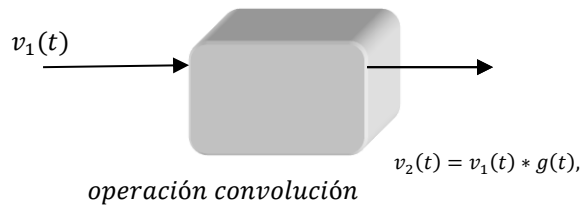


Figura 3. Diagrama a bloques del circuito en el dominio t y en el dominio s.

Para explorar la respuesta a la frecuencia del sistema lineal se hace $s = j\omega$. Se considera como entrada un voltaje senoidal cuya frecuencia sea ω rad/seg y una amplitud pico de

$$|v_1(t)| \text{ volts}$$

Se tiene la certeza de que el voltaje de salida en estado estacionario será también senoidal con la misma frecuencia ω rad/seg pero modificada en amplitud y posición angular respecto a la señal de entrada [1].

Forma rectangular de la FDT evaluada en la frecuencia en rad/seg

$$G(j \cdot \omega) = \frac{R \cdot C \cdot j \cdot \omega}{R \cdot C \cdot j \cdot \omega + 1} = (\text{Re}(G(j \cdot \omega))) + j \cdot \text{Im}(G(j \cdot \omega))$$

Forma polar de la FDT evaluada en la frecuencia en rad/seg

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \text{ángulo}(G(j\omega))$$

Donde:

$|G(j\omega)|$ Magnitud de la FDT para la frecuencia ω
 $\text{ángulo}(G(j\omega))$ Ángulo de la FDT para la frecuencia ω

Buscando una expresión para la magnitud se realiza:

$$|G(j\omega)| = \frac{|R \cdot C \cdot 1j\omega|}{|R \cdot C \cdot 1j\omega + 1|} =$$

$$\frac{\left[\sqrt{(R \cdot C \cdot \omega)^2 + 0^2} \right]}{\sqrt{(R \cdot C \cdot \omega)^2 + 1^2}} = \frac{\omega \cdot R \cdot C}{\sqrt{(R \cdot C \cdot \omega)^2 + 1}}$$

Buscando ahora una expresión para el comportamiento del ángulo se ejecuta:

$$\text{ángulo}(G(j\omega)) = \text{ángulo}(jRC\omega) - \text{ángulo}(1 + jRC\omega)$$

$$\text{ángulo}(G(j\omega)) = \tan^{-1}\left(\frac{RC\omega}{0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{RC\omega}{1}\right)$$

$$\text{ángulo}(G(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{RC\omega}{1}\right)$$

En la figura 4 se presenta el comportamiento del sistema eléctrico en función de la frecuencia

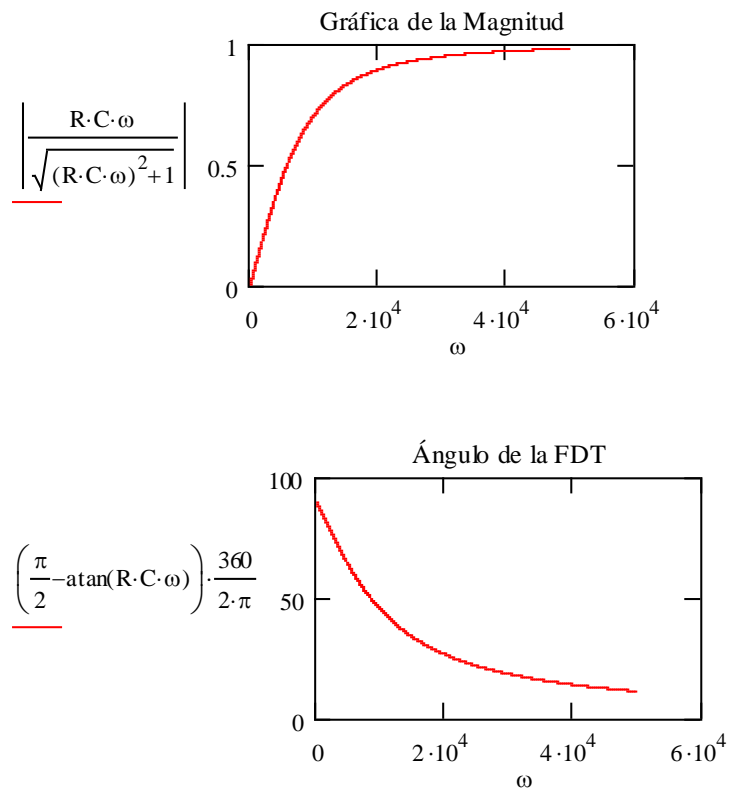


Figura 4. Comportamiento de la FDT considerando entrada senoidal y variando la frecuencia.

Observando el comportamiento de la magnitud se distingue que la red estudiada es un filtro pasa-altas y observando el comportamiento del ángulo se aprecia que es una red de adelanto.

La frecuencia de corte está dada para cuando la magnitud de la FDT sea:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Así mismo, la frecuencia de corte cumple cuando el ángulo sea:

$$\frac{\pi}{4} = 45\text{deg}$$

Entonces el valor de la frecuencia de corte se encuentra si se hace:

$$\omega_{\text{corte}} = \frac{1}{R \cdot C}$$

II. PARTE TÉCNICA DEL ARTÍCULO

Ahora restringiendo como señales de entrada, aquellas que cumplan que sean periódicas y de una frecuencia mucho menor que la frecuencia de corte; es decir:

$\omega \ll \omega_{\text{corte}}$, entonces la función de transferencia se puede aproximar a la siguiente expresión:

$$G(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} \approx \overline{G(s)} = RCs \quad \text{para } RCs \ll 1$$

$$\frac{\overline{V_2(s)}}{\overline{V_1(s)}} = \overline{G(s)} = RCs$$

Despejando la salida

$$\overline{V_2(s)} = RCs \overline{V_1(s)}$$

Luego aplicando la propiedad de la transformada de Laplace que propone que si una función de s se multiplica por un factor s de multiplicidad n equivale en el tiempo a que se tenga la derivada n -ésima de la señal temporal [4]. Es decir se obtiene lo que se pretende demostrar; en otras palabras, se encuentra la expresión (1) que muestra la obtención de la derivada de una señal de voltaje.

$$v_2(t) = RC \frac{d}{dt} v_1(t) \quad (1)$$

condicionada a que la frecuencia de entrada cumpla la restricción dada por (2).

$$\omega \ll \frac{1}{RC} \quad (2)$$

III. RESULTADOS

VALIDACIÓN 1. Entrada senoidal periódica.

Considerando como parámetros $R=1000$ ohms, $C=0.1\mu F$ y como entrada una señal de voltaje senoidal de 10 volts pico con un off set de 0 V a una frecuencia de 150 Hz. Probando si cumple restricción de frecuencia

$$\frac{1}{R \cdot C} = 1 \times 10^4 \text{ rad/seg}$$

Convirtiéndolo a Hz serían

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} = 1.592 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Es decir la frecuencia de corte es de 1.592 KHz

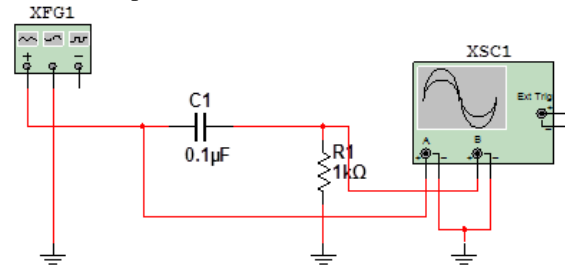
Si se alimenta una señal senoidal con frecuencia de 150 Hz, se observa que sí cumple la restricción ya que $150\text{Hz} \ll 1592\text{Hz}$ y la red eléctrica sí derivará, luego se procede a expresar la salida como:

$$v_2(t) = RC \frac{d}{dt} 10 \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot t)$$

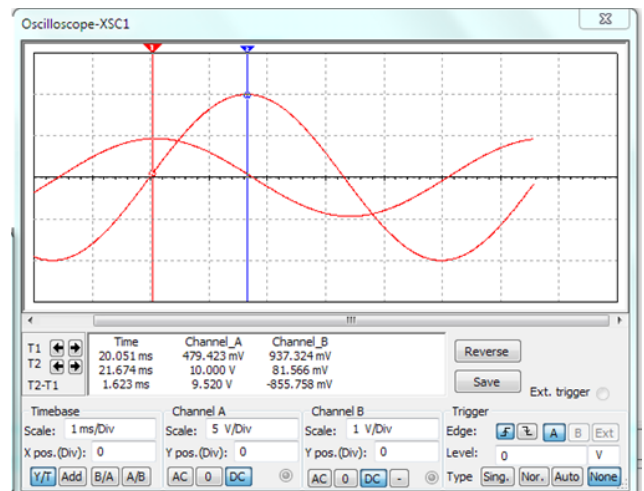
Lo cual produce con los valores asignados un valor teórico de:

$$v_2(t) = 0.942 \text{cos}(2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot t)$$

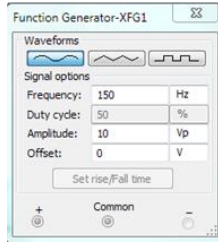
Realizando la prueba en el laboratorio se obtiene:



(a) Circuito de prueba indicando equipo de excitación y medición.



(b) Señales de voltaje de entrada y salida.



(c)Parámetros del generador de señales

Figura 5. Circuito de prueba y mediciones para una entrada senoidal.

Nótese que la señal de entrada muestra un valor pico de 10 Volts y la señal de salida muestra un valor pico cercano a 1 volt, con un desfase de 90 grados DEG; es decir, la entrada es un seno y la salida es un coseno.

VALIDACIÓN 2. Entrada cuadrada periódica.

Considerando como parámetros $R=1000$ ohms, $C=0.1\mu F$ y como entrada una señal de voltaje cuadrada de 5 volts pico a una frecuencia de 150 Hz, con un offset de 5 volts. Probando si cumple restricción de frecuencia

$$\frac{1}{R \cdot C} = 1 \times 10^4 \text{ rad/seg}$$

Convirtiéndolo a Hz serían

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} = 1.592 \times 10^3 \text{ Hz.}$$

Es decir, la frecuencia de corte es de 1.592 KHz. Si se alimenta una frecuencia de 150 Hz, se observa que sí cumple la restricción ya que $150\text{Hz} \ll 1592\text{Hz}$ y la red eléctrica sí derivará, luego se procede a expresar la salida como se muestra en la ecuación (3).

$$v_2(t) = RC \frac{d}{dt} 10 \left(\phi(t) - \phi\left(t - \frac{T}{2}\right) + \phi\left(t - 2\frac{T}{2}\right) - \phi\left(t - 3\frac{T}{2}\right) + \dots \right) = 10RC \frac{d}{dt} \sum_0^{\infty} (-1)^n * \phi\left(t - n\frac{T}{2}\right) \tag{3}$$

Recalcando que T es el periodo de la señal a alimentar y es igual a $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{150}$ en segundos. Donde $\phi(t)$ se define como un voltaje escalón unitario es decir:

$$\Phi(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Recordando que la derivada de una señal escalón produce un impulso. Simbólicamente esta operación se expresa según la ecuación (4):

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) \tag{4}$$

De manera similar, la derivada de un escalón recorrido produce un impulso recorrido, ver (5):

$$\delta\left(t - n\frac{T}{2}\right) = \frac{d}{dt} \phi\left(t - n\frac{T}{2}\right) \tag{5}$$

En la figura 6 se ilustra la gráfica de una señal escalón retardada n veces T/2 segundos y también se ilustra su correspondiente derivada que es un impulso retardado

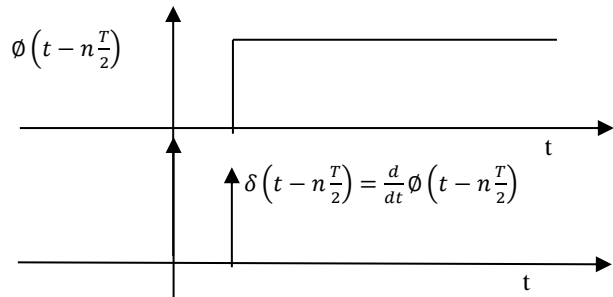
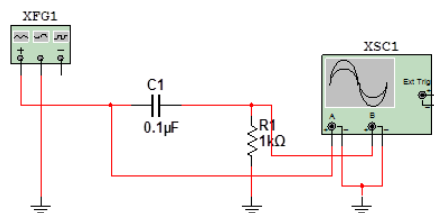


Figura 6. Señal escalón retardada en el tiempo y su derivada, impulso retardado en el tiempo.

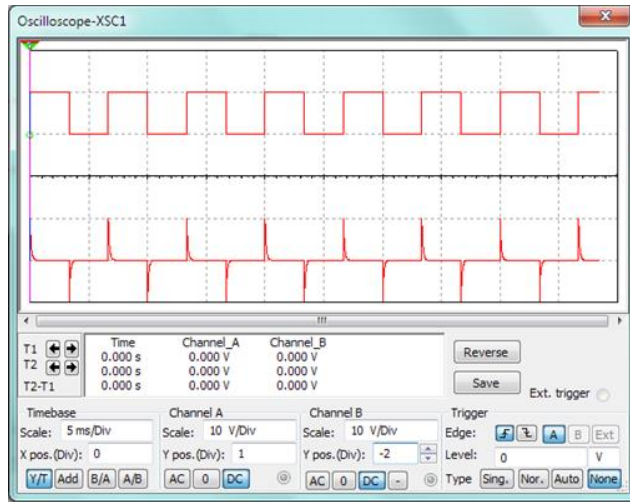
La salida mostrada en la figura 7 en realidad es una secuencia de aproximaciones al impulso [3], resultado de la derivación de una sumatoria de escalones, ver (6).

$$v_2(t) = RC10 \left(\delta(t) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \delta\left(t - 2\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - 3\frac{T}{2}\right) + \dots \right) = 10RC \sum_0^{\infty} (-1)^n * \delta\left(t - n\frac{T}{2}\right) \tag{6}$$

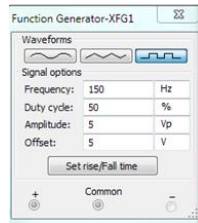
Realizando la prueba en el laboratorio se obtienen los resultados mostrados en la figura 7. Nótese que la señal de entrada es una sumatoria de escalones recorridos en el tiempo y la correspondiente salida es una secuencia de aproximaciones al impulso de cada escalón.



(a)Circuito de prueba indicando equipo de excitación y medición.



(b) Señales de voltaje de entrada y salida



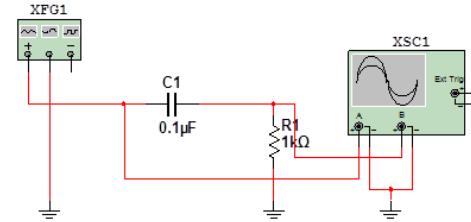
(c) Parámetros del generador de señales

tendrá como salida una secuencia de escalones. Entonces la forma teórica del voltaje de salida será la mostrada en (7):

Cuantificando su valor teórico:

$$v_2(t) = RC * 10 * \sum_0^{\infty} (-1)^n * \delta\left(t - n\frac{T}{2}\right) \\ = RC10 \left(\delta\left(t\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \delta\left(t - 2\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - 3\frac{T}{2}\right) + \dots \right) \quad (7)$$

Realizando la prueba en el laboratorio se obtiene:



(a) Circuito de prueba indicando equipo de excitación y medición.

Figura 7. Circuito de prueba y mediciones para una entrada sumatoria de escalones

VALIDACIÓN 3. Entrada Triangular Periódica.

Considerando como parámetros $R=1000$ ohms, $C=0.1\mu F$ y como entrada una señal de voltaje triangular de 10 volts pico con un off set de 0 V a una frecuencia de 150 Hz. Probando si cumple restricción de frecuencia

$$\frac{1}{R \cdot C} = 1 \times 10^4 \text{ rad/seg}$$

Convirtiéndolo a Hz serán

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} = 1.592 \times 10^3 \text{ Hz}$$

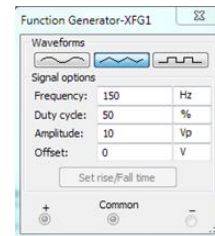
Es decir la frecuencia de corte es de 1.592 KHz. Si se alimenta una frecuencia de 150 Hz, se observa que sí cumple la restricción ya que $150\text{Hz} \ll 1592\text{Hz}$ y la red eléctrica sí derivará, luego se procede a expresar la salida como:

$$v_2(t) = RC \frac{d}{dt} (\text{suma de segmentos de líneas rectas}) \\ = RC (\text{suma de escalones})$$

Recordando que al derivar una función lineal se produce una constante, entonces al derivar una función definida como una secuencia de segmentos de líneas, entonces se



(b) Señales de voltaje de entrada y salida



(c) Parámetros del generador de señales.

Figura 8. Circuito de prueba y mediciones para una entrada secuencia de segmentos de líneas rectas.

Nótese que derivar un segmento de línea con pendiente positiva produce un escalón positivo y derivar un segmento de línea con pendiente negativa produce un escalón negativo.

IV. DISCUSIÓN, CONCLUSIÓN Y RECOMENDACIONES

Todo filtro pasa-altas opera como derivador bajo ciertas restricciones.

La condición para que opere la red eléctrica pasiva propuesta como un circuito derivador de voltajes es que la frecuencia de alimentación de la entrada sea de una valor mucho menor que la frecuencia de corte del filtro pasa-altas.

Se validó experimentalmente que: la derivada de una señal seno produce una señal coseno; la derivada de un escalón produce aproximadamente un impulso; la derivada de una línea recta produce una constante, o lo que es equivalente, la derivada de una rampa produce un escalón.

La realización de la derivación de señales de voltaje se construyen en la práctica con el apoyo de circuitos integrados (IC), tal procedimiento restringe la operación de la derivación al ancho de banda del IC empleado. En este trabajo se propone una opción alternativa para realizar la derivación, ya que se está demostrando emplear una red eléctrica pasiva; es decir sin requerir IC's.

En el desarrollo teórico de este trabajo se proponen representaciones simbólicas, mediante fórmulas, para señales típicas en un laboratorio de Electrónica y se sustentan sus representaciones con validaciones prácticas fácilmente realizables.

En todo este documento se abordan sólo los casos que favorecen la intención del trabajo, se recomienda, si así es el interés del lector, reproducir los experimentos para cuando no se tienen los resultados favorables que aquí se reportan; es decir, se sugiere repetir las validaciones propuestas pero ahora sin cumplir las restricciones que aquí se muestran. Si decide hacerlo, obtendría imágenes interesantes.

V. AGRADECIMIENTO.

Los autores agradecen al Tecnológico Nacional de México, al Instituto Tecnológico de la Laguna y al Instituto Tecnológico Superior de Lerdo por las facilidades brindadas para desarrollar y divulgar el presente trabajo.

VI. REFERENCIAS

- [1] Oppenheim, A. V. (1998). Señales y Sistemas. .Ed. PHH, p.688.
- [2] Hsu, H. P. (1973). Análisis de Fourier. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, pp 37-48.
- [3] Ziemer, R. E. (1981). Principios de Comunicaciones. Sistemas de modulación y ruido. Ed Trillas. P. 35.

- [4] Spiegel, Murray R.(1995) Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas.Ed Mc Graw Hill.
- [5] Couch II, Leon W. (1997). Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos. Ed. PH, p52.
- [6] Coughlin, Robert F. (1998).Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales.Ed PH, pp 156-160.

VII. BIOGRAFÍAS



De la Torre Cantú Jorge, nació en Torreón, Coahuila, México el 9 de mayo de 1962. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica en la División de Posgrado del Instituto Tecnológico de la Laguna (I.T.L.) en el año de 1989. Titulado como Ingeniero Industrial en Electrónica en Torreón, Coahuila, México en el año de 1984.

Ha impartido diversas materias a nivel licenciatura para las carreras de Electrónica, Eléctrica y Mecatrónica en el I.T.L. A nivel maestría lo ha hecho en un par de ocasiones para la división de Posgrado del I.T.L. Él actualmente trabaja como docente en la ciudad de Torreón en el Dpto. de Eléctrica-Electrónica del I.T.L. A él le ha divertido seguir las líneas de investigación en torno a los F.P.G.A.'s.

M.C. De la Torre forma parte de la Academia de Electrónica del I.T.L.



Ríos Marmolejo César. Nació el 30 de junio del año 1971 en la ciudad de Gómez Palacio Durango México. Maestría en Ciencias de Ingeniería Eléctrica por el Instituto Tecnológico de la Laguna. Torreón, Coah., México. Especialista en Ingeniería Mecatrónica por el Instituto Tecnológico Superior de Lerdo en Cd. Lerdo, Durango, México en el año 2016. Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., México en el año 1997.

Él actualmente labora como Jefe de la División de Posgrado y Docente de la Especialización en Ingeniería Mecatrónica del Instituto Tecnológico Superior de Lerdo, Cd. Lerdo. Durango, México. También ha impartido diferentes materias del área de electrónica y redes computacionales para las carreras de Ingeniería en Sistemas Computacionales y Licenciatura en Informática. Las líneas académicas de interés son Sistemas Automáticos de Control y desarrollo de sistemas computacionales.

El Ing. Ríos forma parte del consejo de posgrado del ITSL



Rodríguez Franco Abel. Nació el 6 de junio del año 1960 en la ciudad de Torreón Coahuila México. Obtiene el grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones por el CICESE, Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Baja California, México en el año 1994.Obtiene el grado de Licenciatura en Ingeniería Industrial Electrónica por el Instituto Tecnológico de la Laguna en el año 1981.

Él actualmente labora como docente titular en el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Energías Renovables del Instituto Tecnológico de la Laguna. Las líneas académicas de interés son el Manejo de Señales Analógicas y Digitales, Sistemas Automáticos de Control y las Comunicaciones Electrónicas.

El MC Rodríguez Franco forma parte de la academia de Electrónica en el ITL.