

# Modelado y control por modos deslizantes con acción integral de un robot autobalanceable

I. Gandarilla Esparza<sup>1</sup>, J. L. Meza Medina<sup>2</sup>

**Resumen**— Se presenta un modelo no lineal de un robot autobalanceable obtenido por las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se presenta una ley de control por modos deslizantes con acción integral basándose en el modelo no lineal del robot autobalanceable propuesto y se realizan simulaciones evaluando el desempeño del control por modos deslizantes contra un control clásico aplicados al robot autobalanceable.

**Temas claves**—Sistema Subactuado, Rendimiento, Control por Modos Deslizantes, Acción Integral.

**Abstract**— A nonlinear model of an self-balancing robot obtained by the Euler-Lagrange equations is presented. A sliding mode control law with integral action based on the nonlinear model of the robot autobalanceable proposed is shown and simulations are conducted to evaluate the performance of sliding mode control presented against a classic control applied to autobalanceable robot is presented.

**Keywords**— Underactuated Systems, Performance, Sliding Mode Control, Integral Action.

## I. INTRODUCCIÓN

El robot autobalanceable, también llamado péndulo invertido de dos ruedas, es una planta muy interesante para el estudio de técnicas de control debido a que: es un sistema no lineal, es una planta subactuada, tiene más grados de libertad que actuadores y el objetivo de control que se trata de cumplir en esta planta es hacer que el péndulo se mantenga vertical con la masa del péndulo por arriba del punto de pivoteo, posición que es un equilibrio inestable y complica el control.

Los primeros acercamientos al control de un robot autobalanceable se realizaron usando leyes de control clásico, como realimentación de estados [5] y LQR [4]. En trabajos posteriores se han implementado al mismo tipo de planta leyes de control no lineal, Nguyen propuso en [6] un control por backstepping para la estabilización del péndulo mientras un control PID se encarga de controlar las llantas; en [7] Fuquan muestra una ley de control por modos deslizantes. En la mayoría de la literatura se muestra que los controles son capaces de estabilizar el sistema y soportan perturbaciones externas

(inclinaciones deliberadas de péndulo, empujones, etc.), pero se observa que los controles no logran llevar el ángulo de las llantas a su valor inicial, como se muestra en los resultados experimentales mostrados en [6]. Para resolver este problema se propone un control por modos deslizantes con acción integral para estabilizar el sistema, hacer la planta robusta ante incertidumbres y poder eliminar los errores en estado estacionario en el ángulo de las llantas.

En este trabajo se expondrá el diseño de un controlador por modos deslizante que incluye acción integral. En la sección 2 se mostrará el modelado por ecuaciones de Euler-Lagrange de un robot autobalanceable. En la sección 3 se hablara del diseño de un control por realimentación de estados y el control por modos deslizantes con acción integral. En la sección 4 se mostraran los resultados de la simulación del los controladores discutidos en la sección 3.



Figura 1. Robot autobalanceable

## II. MODELADO DE ROBOT AUTOBALANCEABLE

Un robot autobalanceable consta de un péndulo invertido unido en su punto de pivoteo a dos motores trabajando al unísono cada uno con una llanta. El sistema con el que se trabajó, construido con piezas LEGO Mindstroms se muestra en la figura 1. En este trabajo solo se mostraran los resultados de simulación.

En la figura 2.1 se muestra un diagrama esquemático del robot donde se observa que tanto el ángulo del péndulo  $\psi$ , como el ángulo de las llantas  $\theta$ , se miden con respecto a la vertical. Se considera que el péndulo tiene tres masas puntuales, una corresponde al bloque que contiene el controlador y las otras dos son las masas de los motores.

Para la obtención del modelo dinámico del robot se utilizaron las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para la utilización de dichas ecuaciones es necesario formar el lagrangiano del robot en base a las energías cinética  $K(q)$

<sup>1</sup> I. Gandarilla Esparza (librepensador\_1591@hotmail.com). Instituto tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, México.

<sup>2</sup> J. L. Meza Medina (jlmeza2000@gmail.com). Instituto tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila, México.

y potencial  $U(q)$ .  $q=[\theta \ \psi]$  es el vector de coordenadas generalizadas usadas para este modelado.

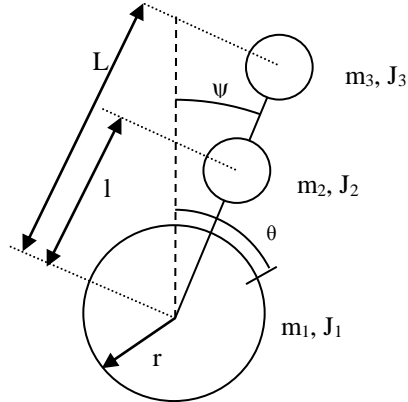


Figura 2. Esquema del robot autobalanceable

$$K(q) = (m_1 r^2 + J_1) \dot{\theta}^2 + m_2 l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} m_3 L^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + (2lm_2 + Lm_3) r \dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\psi) + \left( J_2 + \frac{1}{2} J_3 \right) \dot{\psi}^2 \quad (1)$$

$$U(q) = g(2lm_2 + Lm_3) \cos(\psi) \quad (2)$$

Usando (1) y (2) se construye el lagrangiano del robot:

$$\mathcal{L} = K(q) + U(q) \quad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico del robot, el cual puede ser expresado de la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (4)$$

$M(q)$  es la matriz de inercias,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, es el vector de fuerzas gravitacionales y  $\tau$  son las fuerza generalizadas aplicados al sistema.

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = 2m_1 r^2 + 2m_2 r^2 + m_3 r^2 + 2J_1$$

$$m_{12} = (2lm_2 + Lm_3) r \cos(\psi)$$

$$m_{21} = (2lm_2 + Lm_3) r \cos(\psi)$$

$$m_{22} = 2m_2 l^2 + m_3 L^2 + 2J_2 + J_3$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -(2lm_2 + Lm_3) r \sin(\psi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(2lm_2 + Lm_3) \sin(\psi) \end{bmatrix}$$

Dada la forma en que está construido el robot y a la tercera ley de Newton, se genera sobre el péndulo un torque de igual magnitud pero sentido contrario que el aplicado por los motores a las llantas, por lo tanto  $\tau$  queda como:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_m \\ -\tau_m \end{bmatrix}$$

donde  $\tau_m$  es el par aplicado por los motores.

Para utilizar este modelo en el diseño de controladores es necesario poder controlar el torque entregado por los motores, pero esto no se puede con el sistema en el que se trabaja, por lo que se opto por usar un modelo lineal de los motores y hacer que la entrada de control sea el voltaje aplicado a los motores.

$$\tau_m = 2 \frac{k_t}{R} [v - k_b (\dot{\theta} - \dot{\psi})] - 2f_v \dot{\theta} - 2f_c \text{sign}(\dot{\theta}) - J_4 \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) y expresado el modelo en la forma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , donde  $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]$  son los estados del sistema y  $u = v$  es la entrada de control que para este caso es el voltaje aplicado a los motores, el modelo queda como:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{BF - CE + (B + E)t_m}{AE - BD} + \frac{I(B + E)}{AE - BD} u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{AF - CD + (A + D)t_m}{AE - BD} - \frac{I(A + D)}{AE - BD} u$$

donde:

$$A = 2J_1 + 2m_1 r^2 + 2m_2 r^2 + m_3 r^2 + 2J_4$$

$$B = (2lm_2 + Lm_3) r \cos(\psi)$$

$$C = -(2lm_2 + Lm_3) r \psi^2 \cos(\psi)$$

$$D = (2lm_2 + Lm_3) r \cos(\psi) - 2J_4$$

$$E = m_3 L^2 + 2m_2 l^2 + 2J_2 + J_3$$

$$F = -g(2lm_2 + Lm_3) \sin(\psi)$$

$$t_m = -2 \frac{k_t k_b}{R} (\dot{\theta} - \dot{\psi}) - 2f_v \dot{\theta} - 2f_c \text{sign}(\dot{\theta})$$

$$I = 2 \frac{k_t}{R}$$

En la tabla 1 se explica cada uno de los parámetros del robot autobalanceable y los motores.

TABLA I  
PARÁMETROS DEL ROBOT AUTOBALANCEABLE

Parámetro	Valor
$m_2$	masa de una llantas
$m_2$	masa de un motor
$m_2$	masa del bloque controlador
$J_2$	inercia de una llanta
$J_2$	inercia de un motor
$J_2$	inercia del bloque controlador
$l$	distancia del centro de masa de un motor al eje de las llantas
$L$	distancia del centro de masa del bloque controlador del eje de las llantas
$r$	radio de las llantas
$R$	resistencia del embobinado de los motores
$k_t$	constante de torque de los motores
$k_b$	constante de f.e.m. de los motores
$J_4$	inercia del rotor y engranajes de los motores
$f_v$	coeficiente de fricción viscosa en los motores
$f_c$	coeficiente de fricción de Coulomb en los motores

### III. DISEÑO DE CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES

El control por modos deslizantes que se diseño para el robot autobalanceable cuenta con acción integrante para corregir los errores en estado estacionario que se pudieran presentar. Para generar dicha acción se aumento el modelo matemático agregando dos estados más, de manera que el sistema queda como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + g_1(x)u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= f_2(x) + g_2(x)u\end{aligned}$$

donde  $x_0 = \int x_1$ ,  $x_3 = \int x_4$ ,  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_4 = \psi$ ,  $x_5 = \dot{\psi}$ .

una manera de atacar el hecho de que el robot es un sistema subactuado es usar una superficie de deslizamiento que involucre todos los estados del sistema, como lo hacen en [1], [2] y [3]. Usando las variables de

estado del modelo aumentado se construye la superficie de deslizamiento  $\sigma$ .

$$\sigma = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \quad (6)$$

donde:

$$\sigma_1 = \lambda_1 x_0 + c_1 x_1 + x_2$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 x_3 + c_2 x_4 + x_5$$

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas.

La ley de control propuesta consta de dos partes, una encargada de llevar el sistema hacia la superficie de deslizamiento  $u_{sw}$  y otra parte ayuda a mantener el sistema sobre dicha superficie de deslizamiento  $u_{eq}$ .

$$u = u_{sw} + u_{eq} \quad (7)$$

Derivando (6) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \alpha(\lambda_1 x_1 + c_1 x_2 + f_1(x) + g_1(x)u) \\ &+ \beta(\lambda_2 x_3 + c_2 x_4 + f_2(x) + g_2(x)u)\end{aligned} \quad (8)$$

Igualando (8) a cero, considerando que el sistema ya se encuentra sobre la superficie de deslizamiento, lo que implica que  $\sigma = 0$ ,  $\dot{\sigma} = 0$  y  $u_{sw} = 0$ , y despejando  $u$ , se obtiene el control equivalente  $u_{eq}$ .

$$u_{eq} = \frac{\alpha(\lambda_1 x_1 + c_1 x_2 + f_1(x)) + \beta(\lambda_2 x_3 + c_2 x_4 + f_2(x))}{\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)} \quad (9)$$

Ahora se propone una función candidata de Lyapunov con la cual se tratará de demostrar que el sistema en lazo cerrado tendera a la superficie de deslizamiento.

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (10)$$

Derivando (10) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &= \sigma \dot{\sigma} \\ \dot{V}(\sigma) &= \sigma(\alpha(\lambda_1 x_1 + c_1 x_2 + f_1(x) + g_1(x)u) \\ &+ \beta(\lambda_2 x_3 + c_2 x_4 + f_2(x) + g_2(x)u)) \\ \dot{V}(\sigma) &= \sigma(\alpha(\lambda_1 x_1 + c_1 x_2 + f_1(x)) + \\ &\beta(\lambda_2 x_3 + c_2 x_4 + f_2(x)) + (\alpha g_1(x) + \beta g_2(x))u)\end{aligned} \quad (11)$$

Sustituyendo (7) en (11) y usando (9), se obtiene:

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x))u_{sw} \quad (12)$$

Para asegurar que  $\dot{V}(\sigma) < 0$  se define  $u_{sw}$  como:

$$u_{sw} = -\frac{\eta \tanh(\sigma) + \kappa \sigma}{\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)} \quad (13)$$

$\eta$  y  $\kappa$  son constantes positivas.

#### IV. SIMULACIONES

La simulación de la implementación de la ley de control por modos deslizantes al robot autobalanceable fue realizada usando Matlab® Simulink 2013b. En la tabla 1 se muestran los valores de los parámetros del robot usados en las simulaciones y en la tabla 2 se muestran los valores de las ganancias de los controladores.

Para evaluar el desempeño de la ley de control propuesta también se muestran los resultados de la simulación de un control por realimentación de estados de la forma  $u = -kx$ , creada usando la función place de Matlab® haciendo que  $[-20 \ -100 \ -10 \ -25]$  sean los polos del sistema en lazo cerrado.

En las simulaciones, el sistema se inicia en  $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  y cada 2 segundos se aplica una perturbación equivalente a repentinamente inclinar el robot a 0.35 rad, aproximadamente 20°.

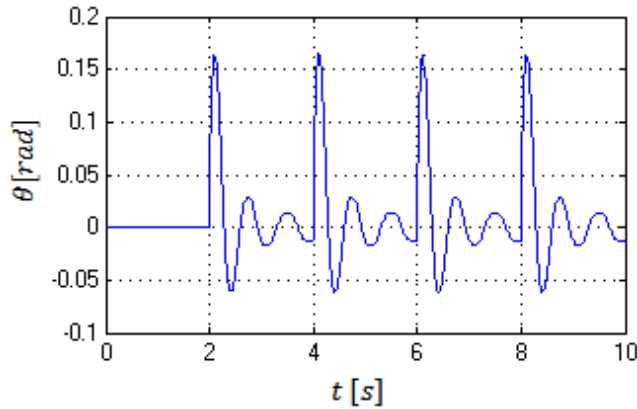


Figura 3. Posición angular de las llantas, control por realimentación de estados

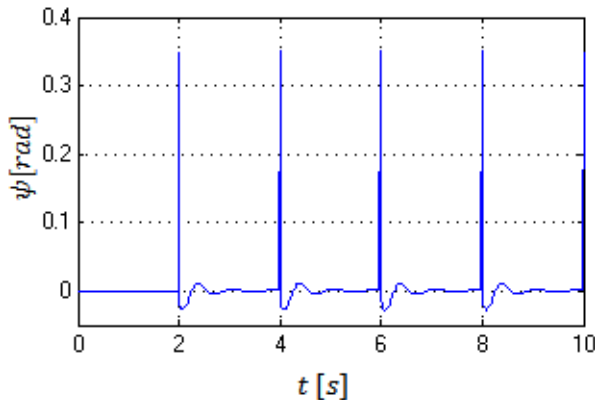


Figura 4. Posición angular del robot, control por realimentación de estados

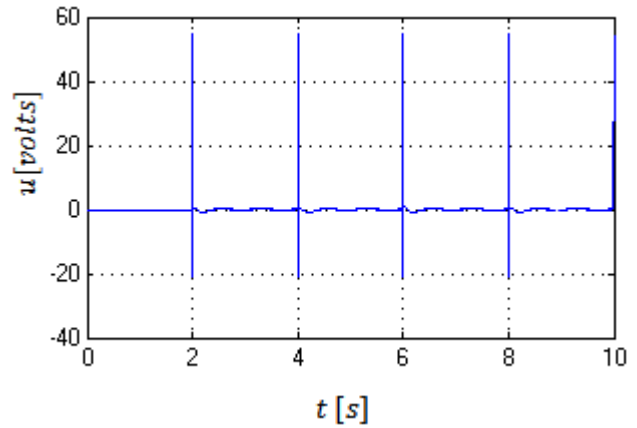


Figura 5. Señal de control, control por realimentación de estados

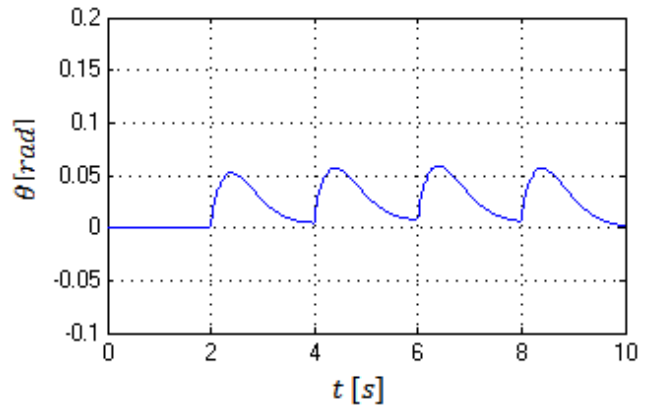


Figura 6. Posición angular de las llantas, control por modos deslizantes

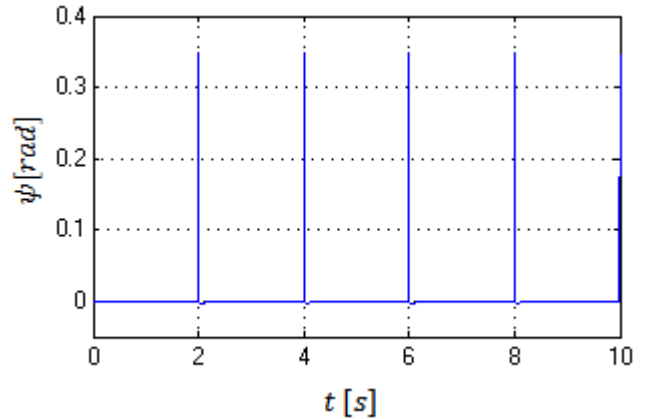


Figura 7. Posición angular del robot, control por modos deslizantes

Observando las figuras 4 y 7 se observa que ambos controles son capaces de estabilizar el robot en el punto deseado rápidamente, la primera diferencia que se nota entre los controles se muestra en las figuras 3 y 6, donde el control por modos deslizantes controla de una manera más suave la posición de las llantas, mientras que el control por realimentación de estados las hace oscilar alrededor del valor deseado. Donde se demuestra la superioridad del

control no lineal sobre el lineal es en las señales de control mostradas en las figuras 5 y 8, mientras que el control por modos deslizantes da picos de aproximadamente 1.75 volts de señal de salida, el control por realimentación de estados da como salida picos de hasta alrededor de 55 volts en la simulación, muy lejos del máximo que pueden soportar los motores con los que cuenta el sistema (9 volts).

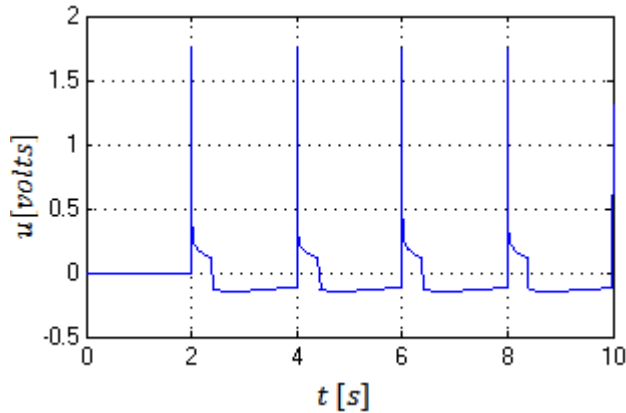


Figura 8. Señal de control, control por modos deslizantes

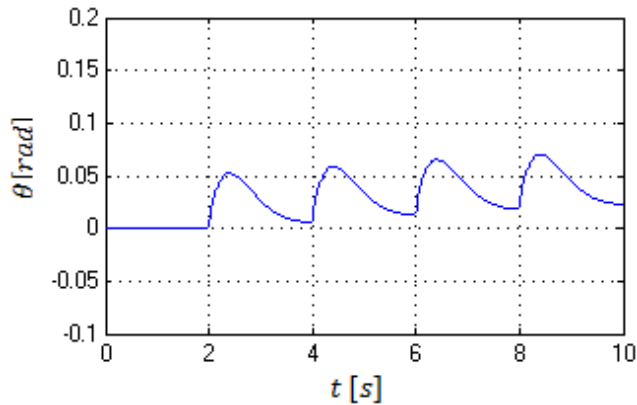


Figura 9. Posición angular de las llantas, control por modos deslizantes con  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

En la figura 9 se muestra el valor de  $\theta$  para  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  lo que elimina la acción integral del controlador. En estos resultados se muestra la acumulación de un error en estado estacionario en la posición angular de las llantas, lo que indica que la acción integral implementada en el control ayuda a eliminar este error.

En las figuras 10 y 11 se muestran los diagramas de fase del robot autobalanceable con el control por modos deslizantes, se observa no hay una línea de conmutación que pasa por el origen, esto es debido a la forma en que se definió la superficie de conmutación.

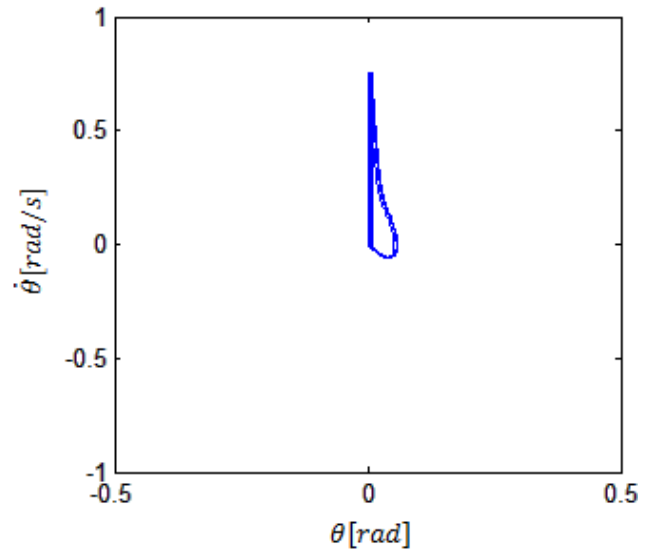


Figura 10. Diagrama de fase  $\theta - \dot{\theta}$

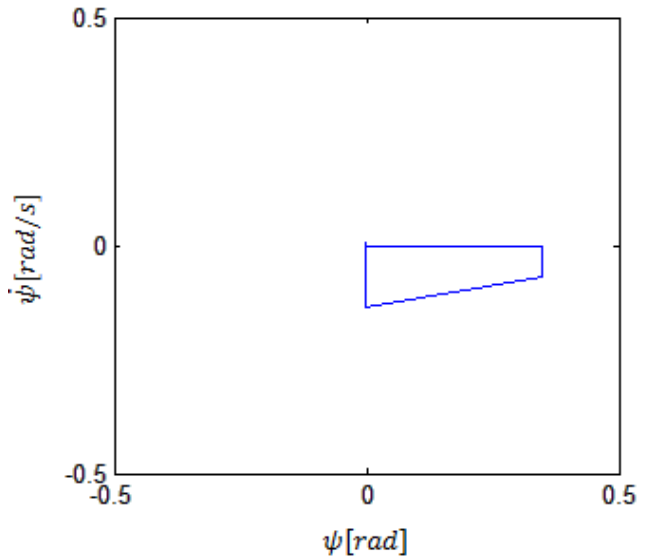


Figura 11. Diagrama de fase  $\psi - \dot{\psi}$

## V. CONCLUSIONES

La implementación en simulación de un control por modos deslizantes con acción integral probó un mejor rendimiento en comparación con un control clásico por realimentación de estados, sobre todo en el aspecto de los valores de la señal de control. La inclusión de la acción integral en el control permitió corregir el error que acumula en la posición de las llantas, lo que permite la planta vuelva al punto de partida cada vez que se le aplica alguna perturbación.

## VI. APÉNDICES

TABLA I

PARÁMETROS DEL ROBOT AUTOBALANCEABLE

Parámetro	Valor
$m_1$	0.016 kg
$m_2$	0.102 kg
$m_3$	0.249 kg
$J_1$	$2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_2$	$3.3 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$J_3$	$1.53 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$l$	0.0572 m
$L$	0.064 m
$r$	0.022 m
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$R$	5.2627 $\Omega$
$k_z$	0.3233 N · m/A
$k_b$	0.4952 V · s/rad
$J_4$	$5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$b$	0.0006 N · s/m
$Ar$	0.0073 N

TABLA 2

GANANCIAS DE LOS CONTROLADORES

Parámetro	Valor
$c_1$	0.1
$c_2$	20
$\lambda_1$	0.025
$\lambda_2$	0.001
$\alpha$	1
$\beta$	10
$\eta$	1
$\kappa$	5
$k_1$	-17.2053
$k_2$	-3.946
$k_3$	-156.5565
$k_4$	-18.638

## VII. AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo otorgado por el Tecnológico Nacional de México para la realización y difusión de este trabajo.

## VIII. REFERENCIAS

- [1] Hao, Y.; Yi, J.; Zhao, D.; Qian, D. (2008) "Robust control using incremental sliding mode for underactuated systems with mismatched uncertainties", American Control Conference, Seattle, USA. pp. 532-537.
- [2] Kurode, S.; Trivedi, P.; Bandyopadhyay, B.; Gandhi, P. S. (2012) "Second Order Sliding Mode Control for a Class of Underactuated Systems", 12<sup>th</sup> IEEE Workshop on Variable Structure Systems, Mumbai, India, pp. 458-462.
- [3] Ashrafiun, H.; Erwin, R. S. (2004) "Sliding Control Approach to Underactuated Multibody Systems" Proceeding of the 2004

American Control Conference, Boston, USA, pp. 1283-1288 vol.2

- [4] Xiaogang, R.; Jiang, L.; Haijiang, D.; XinYuan, L. (2008) "Design and LQ Control of a two-wheeled self-balancing robot" 27<sup>th</sup> Chinese Control Conference, Kunming, China, pp. 275-279.
- [5] Butler, L. J.; Bright, G. (2008) "Feedback control of a self-balancing materials handling robot" 10<sup>th</sup> International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Hanoi, Vietnam, pp. 274-278.
- [6] Nguyen, G. M. T.; Duong, H. N.; Nguyen, H. P. (2010) "A PID Backstepping Controller For Two-Wheeled Self-Balancing Robot" International Forum on Strategic Technology, Ulsan, Korea del Sur, pp. 76-81.
- [7] Fuquan, D.; Fangxing, L.; Yang, B.; Wenzeng, G.; Chengguo, Z.; Xueshan, G. (2012) "Development of a Coaxial Self-Balancing Robot Based on Sliding Mode Control" International Conference on Mechatronics and Automation, Chengdu, China, pp. 1241-1246.



## IX. BIOGRAFÍA

**I. Gandarilla Esparza** nació el 2 de agosto de 1991 en la ciudad de Lerdo, Durango, México. Obtuvo el grado de licenciatura en ingeniería mecatrónica en el Instituto Tecnológico de La laguna en Torreón, Coahuila, México.

El se encuentre actualmente estudiando la maestría en ciencias en ingeniería eléctrica con especialidad en mecatrónica y control en el Instituto Tecnológico de La laguna en Torreón, Coahuila, México.

El ing. Gandarilla, participo de 2010 a 2013 en el concurso nacional de ciencias básicas de la DGEST, ganando el primer lugar en 2011 y 2012, Reconocimiento a la Excelencia Académica por parte del ANFEI.



**J. L. Meza Medina** nació en Torreón, Coahuila México. Recibió el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica del Instituto Tecnológico de la Laguna en 1985. El grado de Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica en el 2006 y un Posdoctorado en Control Inteligente por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey en 2009. Su interés en la investigación

es en el área de Control de Robots, Control no Lineal en aplicaciones Mecatrónicas, Control basado en Pasividad y el Control Inteligente. El Dr. Meza es actualmente Profesor –Investigador de la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de la Laguna.